
Thèse de Doctorat

présentée par

Quentin RICHARD

*Pour obtenir le grade de
Docteur en Mathématiques et Applications de l'Université
Bourgogne Franche-Comté*

Comportement asymptotique de modèles de populations structurées

Thèse soutenue le 08 octobre 2018, devant le jury composé de :

Nabile BOUSSAÏD	Examineur
Vincent CALVEZ	Rapporteur
Laurent DESVILLETES	Rapporteur
Arnaud DUCROT	Examineur
Mustapha MOKHTAR-KHARROUBI	Directeur de thèse
Antoine PERASSO	Directeur de thèse
Magali RIBOT	Examinatrice et Présidente du jury
Ryszard RUDNICKI	Examineur

Remerciements

Tout ce qui a un début, a une fin. Il est temps pour moi de remercier ceux sans qui cette thèse n'aurait pas été ce qu'elle a été.

Celle-ci n'aurait jamais pu avoir lieu sans mes deux directeurs de thèse. Je remercie donc naturellement Mustapha Mokhtar-Kharroubi, pour sa rigueur et sa passion contagieuses des mathématiques : “le diable se cache dans les détails ”! Je remercie également Antoine Perasso, pour son habituel enthousiasme et pour m'avoir fait découvrir cette belle ville d'Italie, appelée Turin : “una grappa per favore”! Merci à eux deux pour tous leurs conseils durant ces trois années.

Je remercie Vincent Calvez et Laurent Desvilletes pour avoir pris le temps de rapporter ma thèse, ainsi que Nabile Boussaïd, Arnaud Ducrot, Magali Ribot et Ryszard Rudnicki pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

J'en profite pour remercier le Laboratoire de Chrono Environnement, qui m'a permis d'effectuer mon stage de Master 2 avec Antoine. Stage sans lequel mon sujet de thèse n'aurait jamais vu le jour, ou en tout cas pas avec moi.

Merci au Laboratoire de Mathématiques de Besançon pour son accueil et la tranquillité qui règne dans les couloirs, qui font qu'il est plaisant d'aller y travailler. Merci à toutes ces personnes qui gèrent, ou ont géré, le service informatique, la bibliothèque et le secrétariat, et qui ont pu résoudre tous mes problèmes techniques ou administratifs.

Parfois, il est bien de faire une pause et d'aller retrouver les habitués (plus ou moins réguliers) de la salle café. Je pense notamment à Bruno, Julien, Ulrich, Yacouba : merci à vous d'avoir égayé ces milieux d'après-midi, et pour vos tentatives désespérées de faire de pire jeux de mots que moi!

Merci également à Ulrich Razafison pour son aide précieuse concernant toute la partie numérique de ma thèse.

Une thèse c'est aussi une bonne ambiance de bureau. Je remercie ainsi Jojo, Toto et Docteur Ho pour ces belles années passées en 328. Notre curieux mélange a permis aux blagues et aux ballons de voler haut. Merci à tous mes co-bureaux qui sont restés plus ou moins longtemps avec nous. Je pense notamment à Aline, Bassad, Loris et TianXiang, qui ont montré que le rire est international.

Les doctorants, il y en a également un étage plus haut. Dans l'ordre pour aller manger, on retrouve Isabelle et Lucie, le duo féminin du 422, Alessandro, Guillaume (ça fait longtemps!) et Antonio. Puis, au bout du couloir, on retrouve le bureau joliment décoré avec Marine qui m'a appris l'expression “C'est pas si pire!”, Colin et sa raquette de squash, Benjamin en qui j'ai confiance pour la relève humoristique, Clément, Thao et Youssef. Merci à vous tous pour ces beaux moments passés ensemble, et pour m'avoir fait découvrir les spécialités franc-comtoises qui permettent de relativiser quand “ça marche pas!”. Merci également aux anciens : Aude, Charlotte, Cyril, Firmin, Michel, pour leurs

Remerciements

habiles réponses à nos angoisses de jeunes doctorants, ainsi que Thibault et Virgile pour les discussions pertinentes de biomaths.

Un merci à mes anciens camarades de fac, Mathieu et Simon pour cette rencontre avec les dromadaires, ainsi qu'Aurélien et Ulysse pour cette belle année de M2.

Je remercie bien évidemment ma famille pour leur soutien et leurs tentatives de comprendre en quoi consistait ma thèse. Un merci particulier à Guillaume et Célia pour avoir relu ma thèse. Une petite dédicace à mes deux neveux, qui sont nés juste avant le début de ma thèse, comme s'ils voulaient eux aussi faire de la recherche.

Je finis par ceux qui sont là depuis le début : mes parents. Merci pour votre encouragement permanent et pour m'avoir permis d'en arriver jusqu'à là. Merci !

Notations

Espaces fonctionnels :

- $I \subset \mathbb{R}$: un ouvert ;
- $L^p(I)$: espaces de Lebesgue ;
- $W^{p,q}(I)$: espaces de Sobolev ;
- $H^q(I) = W^{q,2}(I)$;
- $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$: ensemble des fonctions continues de I dans \mathbb{R} ;
- $\mathcal{C}_c(I)$: ensemble des fonctions continues et à support compact ;
- $\mathcal{L}(\mathcal{X})$: espace des opérateurs linéaires continus de \mathcal{X} dans \mathcal{X} ;
- $\mathcal{K}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{X})$: sous-espace fermé des opérateurs compacts ;
- \mathcal{X}_+ : cône positif de \mathcal{X} un ensemble ordonné.

Opérateurs :

- $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$: un opérateur linéaire ;
- $D(\mathcal{A})$: domaine de l'opérateur \mathcal{A} ;
- $\overline{D(\mathcal{A})}$: adhérence de $D(\mathcal{A})$ dans \mathcal{X} ;
- $\mathcal{A}|_{L^1(I)}$: restriction de l'opérateur \mathcal{A} à l'ensemble $L^1(I)$
- $\{T_{\mathcal{A}}(t)\}_{t \geq 0}$ ou $\{e^{t\mathcal{A}}\}_{t \geq 0}$: semigroupe généré par \mathcal{A} ;
- $\sigma(\mathcal{A})$: spectre de l'opérateur \mathcal{A} ;
- $\rho(\mathcal{A})$: ensemble résolvant de \mathcal{A} ;
- $\sigma_p(\mathcal{A})$: ensemble ponctuel de \mathcal{A} ;
- $s(\mathcal{A})$: borne spectrale de \mathcal{A} ;
- $r_\sigma(\mathcal{A})$: rayon spectral de \mathcal{A} ;
- $\omega_0(\mathcal{A})$: type (ou taux de croissance) de \mathcal{A} ;
- $\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A})$: type essentiel (ou taux de croissance essentiel) de \mathcal{A} ;
- $\|\cdot\|_{\text{ess}}$: norme essentielle.

Notations générales :

- $\text{sign}(f(s)) = f(s)/|f(s)|$ si $f(s) \neq 0$ et 0 sinon ;
- χ_I : fonction indicatrice sur I ;
- $\partial_s f$: dérivée partielle de f par rapport à s ;
- $\text{supp}(f)$: support de f ;
- Φ : semiflot ;
- $\omega(z)$: ensemble ω – limite de z .

Table des matières

1	Introduction générale	5
1.1	Motivation	5
1.2	Sur les équations de transport	6
1.3	De la diffusion en dynamique des populations	7
1.3.1	Les équations de transport/diffusion	7
1.3.2	La condition aux bords de Feller	8
1.4	Quelques comportements asymptotiques	9
1.4.1	Équilibres et stabilité	10
1.4.2	Quelques mots sur le R_0	12
1.4.3	Persistance de solutions	13
1.4.4	Croissance exponentielle asynchrone	14
1.5	Deux applications biologiques	15
1.5.1	Modèles cellulaires avec état de quiescence	15
1.5.2	Les modèles proie-prédateur	16
1.5.3	Les équations de Lotka-Volterra	18
1.6	Principaux résultats du manuscrit	20
1.6.1	Un modèle proie-prédateur structuré en âge	20
1.6.2	Un modèle cellulaire à deux phases avec structure en taille	24
1.6.3	Un modèle de transport-diffusion structuré en taille	28
1.6.4	Un modèle proie-prédateur à retard	33

I Étude d'équations de transport en dynamique des populations **37**

2	Implication of age-structure on the dynamics of Lotka Volterra equations	39
2.1	Introduction	39
2.2	Well posedness and positivity	40
2.2.1	Notations	40
2.2.2	Linear part	40
2.2.3	Local existence, uniqueness and positivity	40
2.2.4	Global existence	42
2.3	Stability, persistence and boundedness	43
2.3.1	Equilibria	44
2.3.2	Stability	44

2.3.3	Persistence	52
2.4	Numerical simulations	57
2.4.1	Numerical scheme	58
2.4.2	Simulations	59
2.4.3	Final remarks	61
2.5	Appendix	62
3	Size-structured two phase population model	63
3.1	Models with bounded sizes	63
3.1.1	Framework and hypotheses	63
3.1.2	Semigroup generation	64
3.1.3	On irreducibility	66
3.1.4	On the spectral bound of the generator	72
3.1.5	On asynchronous exponential growth	77
3.2	Models with unbounded sizes	78
3.2.1	Semigroup generation	79
3.2.2	On irreducibility	80
3.2.3	Asynchronous exponential growth	80
3.2.4	On the spectral bound	83
3.2.5	On the spectral gap	91
II	Étude d'équation de transport avec diffusion	97
4	Time asymptotics of structured populations with diffusion	99
4.1	Models with bounded sizes	99
4.1.1	Framework and hypotheses	99
4.1.2	Semigroup generation	101
4.1.3	On irreducibility	107
4.1.4	On the spectral bound of the generator	109
4.1.5	On asynchronous exponential growth	110
4.2	Models with unbounded sizes	111
4.2.1	Framework and hypotheses	111
4.2.2	Semigroup generation	112
4.2.3	On irreducibility	119
4.2.4	Asynchronous exponential growth	120
4.3	The constant case	125
4.3.1	Framework	125
4.3.2	The main result	125
III	Étude d'équations à retard	135
5	Global stability in a delay predator-prey model	137
5.1	Framework	137
5.1.1	System and equilibria	137
5.1.2	Partition of \mathcal{X}_+	138

5.1.3	Preliminary results	139
5.2	Attractiveness	141
5.2.1	Some definitions	141
5.2.2	Lyapunov function	142
5.2.3	Attractive set of the solutions	143
5.2.4	Number of τ -periodic solutions	145
5.3	Around the equilibria	146
5.3.1	Unattractivity of E_0	147
5.3.2	Local stability of E^*	147
5.4	Back to the PDE model	149
IV Annexes		151
A Quelques rappels		153
A.1	Quelques propriétés spectrales des opérateurs non bornés	153
A.2	Quelques propriétés spectrales des semigroupes	155
A.3	Résultats de compacité (faible)	157
A.4	Quelques résultats de positivité	158
A.5	Formule de Duhamel	160
A.6	Théorème de Lax-Milgram	160
A.7	Principe du maximum	161
B Compléments techniques au Chapitre 2		163
Bibliographie		167

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Motivation

Déterminer l'évolution d'une population au cours du temps intéresse depuis longtemps les biologistes et les mathématiciens. Une des premières modélisations mathématiques remonte en effet au XII^{ème} siècle avec la description par Leonardo Fibonacci du comportement d'une population de lapins à l'aide de suites récurrentes. Cette branche de l'écologie appelée *dynamique des populations* possède de nombreuses modélisations mathématiques (voir les livres de Hillion [78], Bacaër [8] ainsi que de Iannelli et Pugliese [85]). La grande majorité des modèles étudiés (Malthus, Verhulst, Lotka-Volterra pour ne citer que quelques-uns des plus connus) utilisent des Équations Différentielles Ordinaires (EDO) où la variable en jeu est t , le temps qui est supposé continu. Cependant, comme chaque modélisation, celle-ci a ses limites. Dans les modèles cités ci-dessus, les caractéristiques intrinsèques de la population décrite sont négligées : tous les individus sont supposés avoir le même taux de mortalité, de reproduction... mais on peut supposer que ces phénomènes diffèrent d'un individu à l'autre selon une caractéristique qui lui est propre (âge, taille, poids, position dans l'espace ou encore sa charge d'infection). On peut ainsi augmenter le nombre d'équations et étudier des systèmes à compartiments comme en épidémiologie avec les modèles SI, SIR où les individus peuvent être sains, infectés ou guéris.

On peut également considérer que la variable par laquelle on veut distinguer les individus est continue et on parlera alors de *modèle de population structurée* qui est au cœur de cette thèse. Un nombre important de travaux sur ce sujet est présent dans la littérature et on peut en trouver une introduction dans les livres de Charlesworth [26], Diekmann et Metz [106], Cushing [32], Iannelli Martcheva et Milner [83]. On retrouve des applications en épidémiologie dans les livres de Magal et Ruan [101], de Brauer et Castillo-Chavez [21], dans celui de Iannelli et Milner [84] ainsi qu'en démographie avec le livre de Inaba [86].

Dans cette thèse, nous étudions différents modèles de populations structurées. Ce travail est organisé en trois parties. Premièrement, nous allons considérer deux modèles s'écrivant à l'aide d'*équations de transport*. L'un reprend les équations de Lotka-Volterra où la proie est structurée selon son âge :

$$\begin{cases} \partial_t x(t, a) + \partial_a x(t, a) &= -\mu(a)x(t, a) - y(t)\gamma(a)x(t, a), \\ y'(t) &= \alpha y(t) \int_0^\infty \gamma(a)x(t, a) da - \delta y(t), \\ x(t, 0) &= \int_0^\infty \beta(a)x(t, a) da, \end{cases} \quad (1.1)$$

pour $a, t \geq 0$ et une condition aux bords non locale de type intégrale. L'autre modélise l'évolution d'une population de cellules structurée en taille, pouvant entrer dans un état de quiescence, à l'aide du système couplé

$$\begin{cases} \partial_t u_1(t, s) + \partial_s(\gamma_1(s)u_1(t, s)) &= -c_1(s)u_1(t, s) + c_2(s)u_2(t, s) - \mu(s)u_1(t, s) \\ &+ \int_0^m \beta(s, y)u_1(t, y)dy, \\ \partial_t u_2(t, s) + \partial_s(\gamma_2(s)u_2(t, s)) &= c_1(s)u_1(t, s) - c_2(s)u_2(t, s), \\ u_1(t, 0) = u_2(t, 0) &= 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

pour $0 \leq s \leq m \leq \infty, t \geq 0$ et des conditions aux bords de Dirichlet. Dans la deuxième partie, nous étudions un modèle de *transport/diffusion* qui décrit l'évolution d'une population d'individus structurés en taille :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, s) + \partial_s(\gamma(s)u(t, s)) &= \partial_s(d(s)\partial_s(u(t, s))) - \mu(s)u(t, s) \\ &+ \int_0^m \beta(s, y)u(t, y)dy, \\ [\partial_s(d(s)\partial_s u(t, s))]_{s=0} &= b_0\partial_s u(t, 0) - c_0u(t, 0), \\ [\partial_s(d(s)\partial_s u(t, s))]_{s=m} &= -b_m\partial_s u(t, m) - c_mu(t, m), \end{cases} \quad (1.3)$$

pour $0 \leq s \leq m \leq \infty, t \geq 0$ et des conditions aux bords de Feller. Une troisième partie est consacrée à l'analyse du modèle de Lotka-Volterra à *retard*

$$\begin{cases} x'(t) &= \beta_0 e^{-\mu_0 \tau} x(t - \tau) - \mu_0 x(t) - \gamma_0 x(t)y(t), \\ y'(t) &= \alpha \gamma_0 x(t)y(t) - \delta y(t), \end{cases} \quad (1.4)$$

pour $t \geq 0, \tau > 0$. De ces modèles, nous allons nous intéresser à deux aspects :

- le caractère bien posé du problème ;
- le comportement en temps long des solutions.

Une description sommaire des principaux résultats de cette thèse se trouve dans la Section 1.6.

1.2 Sur les équations de transport

Avant de présenter nos résultats, nous faisons un petit tour d'horizon de la littérature connexe. Lorsque la variable structurante est continue, on est amené à étudier une Équation aux Dérivées Partielles (EDP) de type transport (voir Sharpe et Lotka [132], McKendrick [105] et Von Förster [150]) de la forme

$$\partial_t x(t, a) + \partial_a x(t, a) = -\mu(a)x(t, a), \quad (1.5)$$

où $x(t, a)$ représente la densité de population à l'instant $t \geq 0$ et d'âge $a \in (0, a_{\max})$. Les fonctions β et μ étant respectivement les taux de reproduction et de mortalité des individus, la prise en compte des naissances ainsi que la condition initiale conduit à l'équation connue sous le nom de McKendrick-Von Förster

$$\begin{cases} \partial_t x(t, a) + \partial_a x(t, a) &= -\mu(a)x(t, a), \\ x(0, a) &= x_0(a), \\ x(t, 0) &= \int_0^{a_{\max}} \beta(a)x(t, a)da, \end{cases} \quad (1.6)$$

où $(t, a) \in \mathbb{R}_+ \times [0, a_{\max}]$. Cette EDP a été largement étudiée entre autre par Gurtin et MacCamy [63], Webb [153], Metz et Diekmann [106], Thieme [142], Perthame [122], Magal et Ruan [101].

Considérons maintenant que la variable structurante est la taille que l'on va noter $s \in [0, s_{\max}]$ où $s_{\max} \leq +\infty$ est la taille maximale. Puisque celle-ci n'évolue pas forcément à la même vitesse que le temps, on va noter $\gamma(s)$ le taux de croissance d'un individu de taille s , i.e.

$$\gamma(s) = \frac{ds}{dt}$$

et l'équation de transport (1.5) devient alors

$$\partial_t x(t, s) + \partial_s(\gamma(s)x(t, s)) = -\mu(s)x(t, s).$$

Cette équation a été obtenue par Sinko et Streifer [134] en supposant de manière plus générale que les individus sont structurés à la fois en âge et en taille. Contrairement au cas où la variable structurante est l'âge, on peut supposer qu'aucun individu ne naît avec une taille nulle et donc considérer une condition aux bords de type Dirichlet en $s = 0$. Le terme de reproduction apparaît ainsi directement dans l'équation de transport sous forme intégrale :

$$\partial_t x(t, s) + \partial_s(\gamma(s)x(t, s)) = -\mu(s)x(t, s) + \int_0^{s_{\max}} \beta(s, y)x(t, y)dy,$$

où $\beta(s, y)$ représente le taux avec lequel un individu de taille y produit un individu de taille s . Pour plus de littérature sur les modèles structurés en taille, on pourra regarder [5, 106, 155] ainsi que les références à l'intérieur.

Lorsque l'on modélise une densité d'individus, une propriété fondamentale qui intervient est celle de la *positivité* des solutions. Un cadre qui apparaît alors naturellement pour l'étude de ces modèles est l'espace de Lebesgue L^1 afin que la *quantité totale* d'individus définie pour (1.6) par

$$X(t) = \int_0^{a_{\max}} x(t, a)da$$

soit finie à chaque instant $t \geq 0$. Par conséquent, on se placera par la suite dans un espace $L^1(\Omega, \mu)$.

1.3 De la diffusion en dynamique des populations

1.3.1 Les équations de transport/diffusion

Sous certaines considérations, on peut être amené à rajouter de la diffusion dans ces équations de transport. On peut en effet prendre en compte le déplacement des individus dans l'espace et se retrouver avec un modèle de réaction-diffusion. De telles applications biologiques sont apparues avec les travaux de Kolmogorov, Petrovskii et Piscunov [88], puis on pourra regarder les livres de Skellam [135, 136], Okubo [114] et de Murray [112] pour une introduction à ce type de modèle. On peut également noter les travaux de Ducrot et Magal [40] sur des modèles structurés en âge d'infection et en espace, où de la diffusion spatiale permet d'obtenir l'existence d'ondes de propagation.

On peut également incorporer de la diffusion dans des modèles structurés par un trait morphologique pour décrire des variations qui peuvent apparaître par exemple dans la croissance des individus. Considérons par exemple une population d'individus structurés en taille. On peut alors supposer que la croissance ne se fait pas de manière universelle (à l'inverse des modèles structurés en âge où chaque individu vieillit à la même vitesse) mais varie de manière aléatoire : certains grandissent plus vite, plus tôt, etc.

Le premier modèle avec de telles considérations provient de l'article de Waldstätter, Haderer et Greiner [151] dans un contexte épidémiologique avec un cadre mathématique hilbertien. On peut également citer l'article de Milner et Patton [107] où une étude numérique est effectuée avec une comparaison des solutions obtenues avec des modèles sans diffusion. Langlais et Milner [90] ont ensuite donné un résultat de génération du même modèle. Par la suite, Chu, Ducrot, Magal et Ruan [27] ont introduit de la diffusion (constante) dans un modèle de population structurée en taille en montrant l'existence d'une bifurcation de Hopf. Haderer [70] a obtenu de manière plus générale l'équation

$$\partial_t u(t, s) + \partial_s(\gamma(s)u(t, s)) = \partial_s(d(s)\partial_s u(t, s)), \quad s \geq 0, \quad (1.7)$$

où il fait essentiellement une discussion sur le choix de la condition aux bords à choisir. L'analyse d'une telle équation (avec en plus un terme de mortalité et de reproduction) a été initiée par les travaux de Farkas et de Hinow [51] en domaine borné, avec un résultat de génération dans L^1 et une étude du comportement de croissance exponentielle asynchrone. Nous reviendrons dessus dans la Section 1.4.4.

Dans un contexte épidémiologique, Calsina et Farkas [24] ont étudié un modèle non-linéaire de transport/diffusion en montrant le caractère bien posé du problème dans L^1 ainsi qu'en faisant une étude de stabilité des équilibres dont ils ont au préalable cherché l'existence. Les mêmes auteurs ont également analysé dans [25] un modèle SI avec une équation de diffusion non linéaire pour les individus infectés et une EDO non linéaire pour les individus sains (ou susceptibles). Ils montrent existence et unicité de solutions dans un cadre L^1 et étudient l'existence d'un équilibre endémique. Dans deux papiers, Bartłomiejczyk et Leszczyński [13, 14] ont ensuite repris le modèle étudié par Farkas et Hinow [51] et ont d'une part écrit un schéma numérique dont ils ont montré un principe du maximum faible, puis certaines propriétés de stabilité. D'autre part, ils ont montré un principe du maximum également pour le modèle EDP, puis étudié le comportement asymptotique des solutions dans un cadre hilbertien.

1.3.2 La condition aux bords de Feller

Afin que le problème de transport/diffusion (1.7) soit bien posé, il faut ajouter une condition en $s = 0$. Dans son article fondateur [54], Feller a donné une classification complète de toutes les conditions aux bords possibles pour des diffusions en dimension un. La condition aux bords ainsi dite de Feller ou de Wentzell-Robin s'écrit, pour l'équation (1.7), sous la forme

$$[\partial_s(d(s)\partial_s u(t, s))]_{s=0} - b_0 \partial_s u(t, 0) + c_0 u(t, 0) = 0, \quad (1.8)$$

avec b_0 et c_0 deux constantes réelles. Elle fait ainsi intervenir l'opérateur diffusif évalué au bord et englobe les conditions aux bords classiques de Dirichlet, Neumann et de Robin (voir e.g. [4]. Wentzell [157] l'a par la suite généralisée en dimension quelconque.

Une importante littérature sur des équations du second ordre avec de telles conditions aux bords est présente principalement pour l'équation de la chaleur (voir e.g. [52] et les références à l'intérieur). Pour des modèles issus de la dynamique des populations, le premier article avec ce type de condition aux bords est celui de Farkas et Hinow [51]. L'objet du Chapitre 4 portera sur l'analyse spectrale de ce modèle (qui a également été étudié dans [13, 14, 24]).

Des interprétations probabilistes de cette condition aux bords sont abordées par Feller [55] (voir aussi le livre de Bobrowski [20, Chapitre 3]) et de nouveaux phénomènes (tels que l'absorption au niveau de la frontière) sont ainsi rendus possibles. On pourra regarder l'article de Peskir [123] pour un historique sur ce sujet. On pourra aussi regarder l'article de G. Goldstein [62] pour une dérivation et une interprétation de conditions aux bords générales (dont celle de Feller) dans le cadre de l'équation de la chaleur et des ondes.

D'un point de vue biologique, considérons l'équation (1.7) et évaluons-la formellement en $s = 0$. L'équation (1.8) peut ainsi se réécrire sous la *forme dynamique*

$$\partial_t u(t, 0) = (b_0 - \gamma(0))\partial_s u(t, 0) - (c_0 + \gamma'(0))u(t, 0).$$

Cette condition aux bords permet ainsi aux individus de taille $s = 0$ d'évoluer au cours du temps. Une interprétation biologique [13] est que ces individus entrent dans un état d'inactivité. Dans un contexte épidémiologique [24], $u(t, 0)$ représente la densité d'individus qui ont une charge d'infection nulle, autrement dit les individus sains. Les deux classes d'individus se retrouvent ainsi dans une même variable u , alors que dans les modèles épidémiologiques SI classiques (voir e.g. l'article de Haderler [151]), les individus susceptibles et infectés sont séparés en deux variables différentes.

1.4 Quelques comportements asymptotiques

Dans le but d'étudier ces équations de transport, plusieurs approches ont été développées telles que l'utilisation de la formulation d'équations intégrales de Volterra [82, 153], des espaces "suns and stars" [36] et enfin de la *théorie des semigroupes* (voir e.g. [153]). On considère dans toute cette section l'espace de Lebesgue

$$\mathcal{X} = L^1(\Omega, \mu)$$

où (Ω, μ) est un espace mesuré avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 1$. Tout au long de ce manuscrit, nous allons nous servir de l'approche par semigroupes (voir Section A.2 pour plus de détails) et réécrire chaque modèle comme le problème de Cauchy semi-linéaire

$$\begin{cases} u'(t) &= \mathcal{A}u(t) + f(t, u(t)), \quad t > 0, \\ u(0) &= u_0, \end{cases} \quad (1.9)$$

où $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ est un opérateur linéaire et $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ une fonction nonlinéaire. Plusieurs rappels sont donnés dans la Section A.5. Le caractère bien posé est montré à l'aide du théorème de Lumer-Phillips où l'on vérifie que \mathcal{A} génère un C_0 -semigroupe et f est une fonction localement lipschitzienne.

1.4.1 Équilibres et stabilité

Une fois que l'on a existence et unicité des solutions, on s'intéresse à leur comportement asymptotique. Pour cela, on peut regarder s'il existe des solutions indépendantes du temps, que l'on appelle *équilibres* de (1.9). On a besoin également de la notion de *semiflot* qui donne la solution du problème de Cauchy à tout t et pour toute condition initiale.

Définition 1.4.1. On appelle semiflot continu du problème (1.9) l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{X} &\rightarrow \mathcal{X} \\ (t, z) &\mapsto \Phi_t(z) := u_z(t) \end{aligned}$$

où $u_z \in \mathcal{X}$ est l'unique solution de (1.9) de condition initiale $u_z(0) = z$.

Lorsque le problème de Cauchy est non linéaire, il peut exister un (ou plusieurs) équilibre que l'on va noter E dans cette section. L'idée est ensuite d'étudier le comportement des solutions au voisinage de cet équilibre en déterminant sa stabilité au sens classique, rappelée ci-dessous.

Définition 1.4.2. Soit $S \subset \mathcal{X}$ un sous-espace fermé de \mathcal{X} . On dit que le point d'équilibre E est :

1. *stable* (au sens de Lyapunov) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $z \in \mathcal{X}$ on a

$$\|z - E\|_{\mathcal{X}} \leq \eta \Rightarrow \|\Phi_t(z) - E\|_{\mathcal{X}} \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0;$$

2. *localement attractif* dans S s'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $z \in S$ satisfaisant $\|z - E\|_{\mathcal{X}} \leq \eta$, alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\Phi_t(z) - E\|_{\mathcal{X}} = 0; \tag{1.10}$$

3. *localement asymptotiquement stable* dans S si E est à la fois stable et localement attractif dans S ;
4. *globalement attractif* dans S si pour tout $z \in S$, l'équation (1.10) est vérifiée;
5. *globalement asymptotiquement stable* dans S si E est stable et globalement attractif dans S ;
6. *instable* s'il n'est pas stable;
7. *faiblement inattractif* dans S si E n'est pas localement attractif dans S ;
8. *fortement inattractif* dans S si pour tout $z \in S \setminus E$ alors (1.10) n'est pas vérifiée.

De la même manière que pour un système d'EDO non linéaires, on linéarise l'équation semi-linéaire autour de l'équilibre en question, puis on regarde le spectre de l'opérateur linéarisé, qui n'est pas forcément ponctuel en dimension infinie. Ceci donnera un résultat de stabilité globale pour le modèle linéarisé, mais locale pour le système non linéaire. On pourra regarder les Sections A.1 et A.2 pour quelques rappels sur la théorie spectrale d'opérateurs et de semigroupes (type, type essentiel, borne spectrale, rayon spectral, etc.)

Théorème 1.4.3 ([153], Proposition 4.19, p. 206). *On considère le problème de Cauchy (1.9) et on note E un équilibre de ce problème. On dénote par $D_E f$ la différentielle de f au point E . Le système linéarisé de (1.9) est ainsi*

$$u'(t) = (\mathcal{A} + D_E f)u(t)$$

et on obtient :

1. Si $\omega_0(\mathcal{A} + D_E f) < 0$ alors E est localement asymptotiquement stable ;
2. Si $\omega_0(\mathcal{A} + D_E f) > 0$ et $\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A} + D_E f) \leq 0$ alors E est instable,

où $\omega_0(\mathcal{A} + D_E f)$ et $\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A} + D_E f)$ désignent respectivement le taux de croissance (ou type) et le taux de croissance essentiel (ou type essentiel) de $\mathcal{A} + D_E f$.

Remarque 1.4.4. Il est important de noter ce qu'il se passe lorsque $\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A} + D_E f) > 0$. Puisque

$$\omega_0(\mathcal{A} + D_E f) = \max\{\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A} + D_E f), s(\mathcal{A} + D_E f)\},$$

où $s(\mathcal{A} + D_E f)$ est la borne spectrale de $\mathcal{A} + D_E f$, alors forcément $\omega_0(\mathcal{A} + D_E f) > 0$. En revanche, rien n'est dit pour le signe de $s(\mathcal{A} + D_E f)$. Lorsque \mathcal{A} génère un C_0 -semigroupe positif dans L^1 , alors $s(\mathcal{A} + D_E f) > 0$ (puisque, dans ce cas, la borne spectrale et le type sont égaux), ce qui implique l'instabilité de E .

Dans le Chapitre 2, nous allons nous servir de cette notion de stabilité pour donner une idée du comportement des solutions au voisinage des équilibres pour le modèle non linéaire (1.1). Afin d'obtenir plus de renseignements sur le caractère asymptotique des solutions, on définit la notion d'ensemble attractif.

Définition 1.4.5. On note $\mathcal{O}_z = \{\Phi_t(z), t \geq 0\}$ l'orbite partant d'un point $z \in \mathcal{X}$ et

$$\omega(z) = \bigcap_{a \geq 0} \overline{\{\Phi_t(z), t \geq a\}}$$

l'ensemble ω – limite de z .

Dans le Chapitre 5 nous allons étudier l'attractivité d'un équilibre non trivial pour le modèle (1.4) grâce aux fonctions de Lyapunov dont on rappelle la définition.

Définition 1.4.6. Soit $D \subset \mathcal{X}$ un sous-espace fermé de \mathcal{X} . Une fonction $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de Lyapunov D si

1. L est continue sur D ;
2. la fonction $t \mapsto L(\Phi_t(z))$ est décroissante pour tout $z \in D$.

1.4.2 Quelques mots sur le R_0

Lors de l'étude de modèles issus de la dynamique des populations, une question fondamentale que se posent en particulier les biologistes est de savoir si les populations vont s'éteindre et disparaître ou au contraire subsister. Une notion qui apparaît alors régulièrement dans la littérature est celle de " R_0 " (voir l'article de Heesterbeek [75] pour un bref historique). Considérons le modèle de McKendrick-Von Förster (1.6) avec $a_{\max} = +\infty$. La quantité totale d'individus au temps t est alors donnée par

$$X(t) = \int_0^{+\infty} x(t, a) da$$

et une intégration formelle de (1.6) par rapport à a donne

$$X'(t) = \int_0^{\infty} (\beta(a) - \mu(a))x(t, a) da$$

pour tout $t \geq 0$). Si les fonctions β et μ ne sont pas constantes, il n'est à première vue pas évident de savoir comment va évoluer la population totale $X(t)$. Afin d'en déduire le comportement des solutions, on définit

$$R_0 = \int_0^{+\infty} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(s) ds} da. \quad (1.11)$$

Un résultat, pressenti par Sharpe et Lotka [132], puis montré rigoureusement par Feller [53] à l'aide de formulations intégrales et enfin par Webb [152, 153] en utilisant les semigroupes et la méthode des caractéristiques, est le suivant (sous de bonnes hypothèses).

Théorème 1.4.7. *1. Si $R_0 < 1$ alors 0 est globalement asymptotiquement stable ;*
2. Si $R_0 > 1$ alors 0 est instable.

Remarque 1.4.8. Le théorème nous dit ainsi que la population va finir par disparaître lorsque $R_0 < 1$, et ce, quelle que soit la condition initiale prise dans $L^1(\mathbb{R}_+)$. Cette notation est d'abord apparue en démographie avec les travaux de Dublin et Lotka [39] (voir le livre de Inaba [86, Chapitre 9] pour plus de références), mais est également maintenant très présente en épidémiologie (voir e.g. les travaux de Diekmann, Heesterbeek et Metz [37, 38]). Dans ce cas, le nombre R_0 représente le taux de reproduction de base et est défini comme le nombre moyen de nouveaux cas d'infection, engendrés par un individu infecté moyen (au cours de sa période d'infectiosité), dans une population d'individus entièrement constituée de susceptibles.

Lors de l'étude du modèle (1.1), le seuil R_0 défini par (1.11) va nous donner l'extinction des deux populations lorsqu'il est strictement plus petit que 1. Dans notre contexte, R_0 représente le nombre moyen d'individus engendrés par un individu au cours de sa vie. Il faut en effet voir que la fonction

$$a \mapsto e^{-\int_0^a \mu(s) ds}$$

représente la probabilité pour chaque individu de survivre jusqu'à l'âge a .

Des modèles linéaires plus généraux conduisent aussi à des seuils analogues liés à la borne spectrale de \mathcal{A} (voir par exemple l'article de Thieme [143]).

1.4.3 Persistance de solutions

Lorsque $R_0 > 1$, l'équilibre trivial de (1.6) est instable, mais rien n'est dit quant au caractère asymptotique des solutions. En supposant par exemple que

$$\text{supp}(\beta) = [\beta_0, \beta_1], \quad 0 \leq \beta_0 < \beta_1 < +\infty,$$

où $\text{supp}(\beta)$ désigne le support de la fonction β et en prenant une condition initiale $x_0 \in L^1(\mathbb{R}_+)$ vérifiant

$$\text{supp}(x_0) \subset [\beta_1, +\infty),$$

on peut montrer qu'il n'y a jamais de renouvellement de la population i.e. $x(t, 0) = 0$ pour tout $t \geq 0$ et donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, \cdot)\|_{L^1(0, \infty)} = 0.$$

Cependant, d'autres conditions initiales (voir e.g. [153, Théorème 4.10, p. 188]) engendrent une solution dont la norme L^1 tend vers l'infini. On voit donc que, malgré l'instabilité de l'équilibre trivial, la population peut encore disparaître selon la condition initiale choisie. Une autre notion qui intervient alors naturellement est celle de *persistance* (voir par exemple [23, 57]), qui s'intéresse à savoir si, pour des temps assez grands, la population totale va subsister ou non. Cette notion est d'abord apparue dans des modèles démographiques [56], puis dans un contexte épidémiologique, où la question est de savoir si une maladie va persister (voir e.g. [120]).

On se place ici dans $\mathcal{X} = L^1(0, +\infty)$, puis on définit $\rho : \mathcal{X} \ni x \mapsto \int_0^\infty x(t, a) da \in \mathbb{R}_+$ une fonction positive uniformément continue sur \mathcal{X} et on note $\sigma_\rho(t, x) = \rho(\Phi_t(x))$ qui est donc continue, où Φ_t est le semiflot défini plus haut. Avant de donner la définition de persistance, on introduit les notations suivantes

$$\sigma_\rho^+(x) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \sigma_\rho(t, x), \quad \sigma_\rho^-(x) = \liminf_{t \rightarrow +\infty} \sigma_\rho(t, x).$$

Définition 1.4.9. La population x est dite

1. *uniformément fortement persistante* si

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in \mathcal{X}, \quad \rho(x) > 0 \Rightarrow \sigma_\rho^-(x) \geq \varepsilon;$$

2. *uniformément faiblement persistante* si on a l'inégalité ci-dessus avec $\sigma_\rho^+(x)$ au lieu de $\sigma_\rho^-(x)$.

Remarque 1.4.10. On peut également définir de la persistance non uniforme si ε dépend de la condition initiale x choisie.

Cette notion de persistance sera utilisée lors de l'étude du modèle (1.1) dans le cas où $R_0 > 1$ i.e. quand l'équilibre trivial est instable.

1.4.4 Croissance exponentielle asynchrone

Un autre phénomène important en dynamique des populations est la propriété de *croissance exponentielle asynchrone*. De manière grossière, ce phénomène dit que, pour une population structurée selon une variable a , sa densité de population $u(t, a)$ est asymptotiquement égale à $e^{\lambda_0 t} n_0(a)$ pour t assez grand, où λ_0 est une constante et n_0 est une distribution indépendante de la condition initiale. Autrement dit, la structure de la population se réorganise de la même manière que la fonction n_0 (voir e.g. [68] et [154]). La définition mathématique est la suivante (voir par exemple [45], p. 336).

Définition 1.4.11. Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semigroupe d'opérateurs linéaires bornés sur \mathcal{X} . On dit que le semigroupe a la propriété de *croissance exponentielle asynchrone* de taux intrinsèque $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ s'il existe un projecteur de rang fini noté P_0 , dans \mathcal{X} tel que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\lambda_0 t} T(t) = P_0$$

(la limite étant dans la topologie de norme d'opérateur).

En pratique, le comportement asynchrone est démontré à l'aide de deux notions clés :

- l'*irréductibilité* du semigroupe dont on rappelle la définition juste après ;
- l'existence d'un *gap spectral*, i.e. (1.12).

On note \mathcal{X}_+ et \mathcal{X}' respectivement le cône positif et le dual de \mathcal{X} puis on dénote par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le crochet de dualité entre L^1 et L^∞ . La notation $f > 0$ signifie $f \in \mathcal{X}_+$ et $f \neq 0$. On pourra regarder la Section A.4 pour plus de rappels sur les opérateurs positifs.

Définition 1.4.12. Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semigroupe positif. On dit qu'il est *irréductible* si pour chaque $f \in \mathcal{X}$, $f > 0$ et $x \in \mathcal{X}'$, $x > 0$ il existe $t > 0$ tel que $\langle T(t)f, x \rangle > 0$. De même, on dira que \mathcal{A} est *irréductible* si, pour chaque $f \in \mathcal{X}$, $f > 0$ et $x \in \mathcal{X}'$, $x > 0$, il existe un entier n tel que $\langle \mathcal{A}^n f, x \rangle > 0$. D'un point de vue géométrique, \mathcal{A} est *irréductible* si et seulement s'il n'existe pas de sous-espace de la forme

$$L^1(\tilde{\Omega}), \quad \tilde{\Omega} \subset \Omega, \quad 0 < |\tilde{\Omega}| < |\Omega|$$

qui soit invariant par \mathcal{A} .

Nous énonçons maintenant le résultat utilisé par la suite pour montrer le comportement asynchrone.

Théorème 1.4.13 ([29], Théorème 9.11, p. 224). *Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semigroupe positif de générateur \mathcal{A} sur \mathcal{X} . Si*

$$\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A}) < \omega_0(\mathcal{A}) \tag{1.12}$$

et si $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est irréductible, alors $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ a la propriété de croissance exponentielle asynchrone et le projecteur P_0 est de rang un.

Remarque 1.4.14. On se réfère à Webb [154, Proposition 2.3] et Thieme [141, Théorème 2.7] pour des résultats similaires dans des espaces de Banach. Lorsque le semigroupe n'est pas irréductible, on a le résultat suivant.

Théorème 1.4.15 ([29], Théorème 9.11, p. 224). *Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semigroupe positif de générateur \mathcal{A} sur \mathcal{X} . Si \mathcal{A} possède un gap spectral, alors*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{-s(\mathcal{A})t}T(t) - e^{tD}P_0\|_{\mathcal{X}} = 0 \quad (1.13)$$

où P_0 est un projecteur de rang fini dans \mathcal{X} et $D = (\lambda_0 - \mathcal{A})P_0$. Lorsque le semigroupe est irréductible, $s(\mathcal{A})$ est semi-simple (i.e. est un pôle simple de la résolvante de \mathcal{A}) et il y a comportement asynchrone puisque $D = 0$.

L'irréductibilité du semigroupe n'intervient pas de la même manière dans les modèles (1.2) et (1.3). Pour le premier modèle, elle est liée au terme intégral

$$\int_0^m \beta(s, y)u_1(t, y)dy,$$

et n'est pas toujours satisfaite. Le comportement (1.13) a ainsi lieu dans ce cas. Pour le second modèle, elle est toujours satisfaite grâce au terme diffusif

$$\partial_s(d(s)\partial_s(u(t, s))).$$

Nous reviendrons dans la Section 1.6 sur l'existence d'un gap spectral pour ces modèles.

1.5 Deux applications biologiques

On présente dans cette section deux applications : l'évolution d'une population de cellules pouvant être soit actives soit au repos, ainsi que les interactions proie-prédateur avec un intérêt particulier sur les équations de Lotka-Volterra.

1.5.1 Modèles cellulaires avec état de quiescence

Dans certaines populations, les individus ne sont pas tous dans un état actif de croissance et de prolifération. En effet, dans certaines circonstances, un individu (ou une cellule) peut croître puis arriver dans un état de repos, dit 'quiescent', avant de retourner dans un état actif. Par exemple, lors de la division de cellules eucaryotes, celles-ci peuvent passer, après la mitose, par la phase G_0 dite de quiescence.

En prenant en compte la maturation des cellules à l'aide d'une variable continue, Rotenberg [127] a introduit dans ce contexte le premier modèle de population structurée. On peut également citer l'article de Dyson, Vilella-Bressan et Webb [42] où la maturation des cellules est également prise en compte. La taille jouant un rôle important dans la dynamique des cellules, Gyllenberg et Webb ont introduit dans [65] le premier modèle de population structurée en taille (et en âge), avec un état de quiescence, pour lequel ils montrent le comportement de croissance exponentielle asynchrone sous des hypothèses générales. Parmi les modèles structurés en âge, on peut regarder les travaux de Arino, Sánchez et Webb [7] ainsi que de Dyson, Vilella-Bressan et Webb [43]. Dans ce cas, les équations étudiées sont de la forme

$$\begin{cases} \partial_t u_1(t, a) + \partial_a u_1(t, a) &= -c_1(a)u_1(t, a) + c_2(a)u_2(t, a) - \mu(a)u_1(t, a), \\ \partial_t u_2(t, a) + \partial_a u_2(t, a) &= c_1(a)u_1(t, a) - c_2(a)u_2(t, a), \end{cases} \quad (1.14)$$

avec $0 < a < a_{\max} < +\infty, t > 0$. De plus, $u_1(t, a)$ et $u_2(t, a)$ représentent respectivement les densités de populations d'âge a et à l'instant t , à l'état proliférant et à l'état de repos. La fonction μ représente la mortalité (uniquement dans l'état actif) et les fonctions c_1 et c_2 dénotent les taux de transition entre l'état de prolifération et de quiescence, ainsi qu'entre l'état de quiescence et de prolifération. Les cellules sont supposées naître dans l'état proliférant :

$$u_2(t, 0) = 0.$$

De plus, pour décrire la division cellulaire et la phase de mitose (division des cellules en deux, supposée se produire uniquement dans l'état actif), on impose

$$u_1(t, 0) = 2 \int_0^{a_{\max}} \mu(a) u_1(t, a) da.$$

Dans ces modèles structurés en âge, le phénomène de croissance exponentielle asynchrone est mis en évidence sous des hypothèses très générales sur les paramètres. Il est en effet démontré dans [7, 43], que pour obtenir l'irréductibilité du semigroupe, il faut avoir

$$\inf \text{supp } c_1 = 0, \quad \sup \text{supp } c_2 = a_{\max}, \quad \sup \text{supp } \mu = a_{\max}.$$

Ces hypothèses permettent respectivement aux cellules proliférantes de jeune âge de devenir quiescentes, aux cellules quiescentes d'âge maximal de redevenir proliférantes, et aux cellules proliférantes d'âge maximal de se reproduire. Par la suite, Farkas et Hinow [50] ont introduit le modèle linéaire (1.2) structuré en taille. Le terme intégral décrivant la reproduction apparaît ainsi dans l'équation et non dans la condition aux bords. Le comportement asymptotique des solutions est étudié sous des hypothèses similaires :

$$\inf \text{supp } c_1 = 0, \quad \sup \text{supp } c_2 = m$$

et il est supposé qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ on a

$$\int_0^\varepsilon \int_{m-\varepsilon}^m \beta(s, y) dy ds > 0$$

i.e. les individus de taille maximale peuvent donner naissance à des individus de taille minimale. On généralise leurs résultats dans plusieurs directions dans le Chapitre 3. Pour des cas particuliers de ce modèle, on peut regarder [9, 66, 67, 126]. On note également une étude de bifurcation de Hopf d'un modèle similaire [28] ainsi que la prise en compte du retard [10] dans la reproduction. De manière générale, les modèles de population avec phase quiescente ont été largement étudiés même sans structuration (voir [69, 71] et les références citées à l'intérieur).

1.5.2 Les modèles proie-prédateur

Lorsque l'on souhaite décrire l'évolution de plusieurs populations d'individus, on peut supposer que celles-ci interagissent entre elles. En considérant deux espèces différentes, une grande classe d'interactions est appelée par les écologues *trophique* ou *ressource consommateur*. Celle-ci regroupe les relations dites de *proie-prédateur* où la première est mangée

à ses dépens par la seconde ce qui lui permet de survivre. Le premier modèle mathématique décrivant de telles interactions trophiques remonte aux années 1920 avec les travaux de Lotka [97] et Volterra [149]. Ce modèle, composé de deux EDO, s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} x'(t) &= ax(t) - bx(t)y(t), \\ y'(t) &= cx(t)y(t) - dy(t), \\ x(0) &= x^0, \quad y(0) = y^0. \end{cases} \quad (1.15)$$

où $x(t)$ et $y(t)$ sont respectivement les densités de populations de proies et de prédateurs à l'instant t , avec :

- $a > 0$ le taux de reproduction des proies ;
- $d > 0$ le taux de mortalité des prédateurs ;
- $b, c > 0$ des taux liés à la prédation.

Il est connu (voir les livres de Edelstein-Keshet [44] et Murray [112]) qu'il existe un équilibre d'extinction $(0, 0)$ et un de cohabitation $(d/c, a/b)$. De plus, pour chaque condition initiale (x^0, y^0) , la solution de (1.15) est périodique (voir Figure 1.1) ce qui explique par exemple les variations obtenues dans les populations de lièvres et de lynx [61] ou encore dans les populations de loups et d'élans [87]. Ce résultat empêche également la population de disparaître ou d'exploser en temps long.

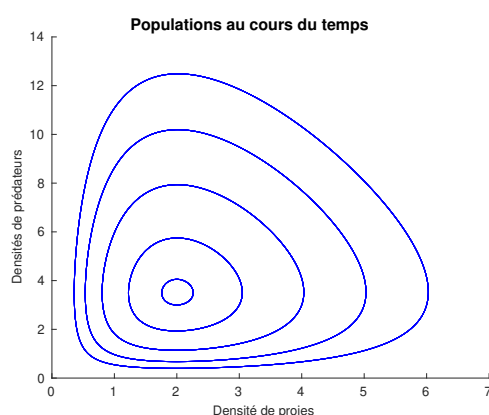


FIGURE 1.1 – Solutions périodiques

Une généralisation a par la suite été suggérée par Gause [59] sous la forme

$$\begin{cases} x'(t) &= ax(t) - p(x(t))y(t), \\ y'(t) &= cp(x(t))y(t) - dy(t), \end{cases}$$

où p est appelée *réponse fonctionnelle* du prédateur. Ces réponses existent en grand nombre dans la littérature (voir [145, Table 4.1, p. 81]) et sont encore discutées [12]. On retrouve ainsi celles introduites par Holling [79] dont la fonction linéaire

$$p(x) = ax : \text{type I,}$$

qui est présente dans le modèle de Lotka-Volterra, ainsi que la fonction

$$p(x) = \frac{ax}{1 + hx} : \text{ type II,}$$

où a et h sont des constantes strictement positives. En considérant que la population de proies croît de manière logistique plutôt qu'exponentielle, beaucoup d'auteurs (voir la bibliographie dans le livre de Turchin [145]) ont étudié des modèles de la forme

$$\begin{cases} x'(t) &= ax(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - p(x(t))y(t), \\ y'(t) &= cp(x(t))y(t) - dy(t), \end{cases}$$

où $K > 0$ est la *capacité limite* des proies. Cette considération rajoute l'existence d'un équilibre $(K, 0)$ avec uniquement la survie de la proie. May [103] a par exemple proposé un modèle à l'aide d'une réponse fonctionnelle de type I où les solutions convergent soit vers l'équilibre de coexistence soit vers celui de disparition des prédateurs. On peut également citer le modèle de Rosenzweig-McArthur [125] avec une réponse fonctionnelle de type II pour lequel on peut obtenir l'existence d'un cycle limite (les solutions convergent vers une fonction périodique) en variant les paramètres.

Ces différents comportements n'apparaissent pas pour le modèle classique de Lotka-Volterra. Pourtant, nous allons voir dans le Chapitre 2 qu'en rajoutant de la structure en âge sur les proies et en considérant le modèle (1.1), on arrive à les retrouver. On pourra regarder les livres de Hastings [74] et de Turchin [145] pour une introduction aux modèles proie-prédateur.

1.5.3 Les équations de Lotka-Volterra

Structurées en âge

Les équations de Lotka-Volterra restent encore un vaste sujet d'étude en dynamique des populations. La plupart utilisent des EDO et parfois des EDP quand on rajoute une partie diffusive en espace (voir par exemple [80, 89] et de manière plus générale le livre de Murray [112] pour l'étude de modèles de réaction-diffusion). Par ailleurs, il peut sembler important de prendre en compte une structuration en âge dans les dynamiques des espèces considérées.

La littérature à propos des modèles proie-prédateur avec structure en âge contient de nombreux modèles EDO compartimentaux (voir [2, 47, 48, 94] et les références à l'intérieur), mais, à notre connaissance, seulement quelques articles prennent en compte une variable d'âge continue. Le premier modèle a été proposé par Gurtin et Levine [64] sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t x(t, a) + \partial_t x(t, a) &= -\mu x(t, a) - by(t)x(t, a), \\ y'(t) &= cy(t) \int_0^\infty x(t, a) da - dy(t), \\ x(t, 0) &= \int_0^\infty \beta(a)x(t, a) da, \end{cases}$$

où $b, c, d, \mu > 0$ sont des constantes strictement positives, avec μ le taux de mortalité des proies et $\beta(a)$ le taux de reproduction des proies d'âge a . Les auteurs montrent alors que sous l'hypothèse

$$\beta(a) = \beta_0 a e^{-\alpha a}, \quad a \geq 0$$

pour $\beta_0 > 0$ et $\alpha > 0$, leur modèle peut être transformé en un problème EDO plus classique. La plupart des articles suivants [91, 144, 30] utilisent le même type d'hypothèses sur les paramètres et obtiennent en conséquence quelques résultats de stabilité grâce aux modèles EDO. On pourra également regarder [129, 130] pour le cas spécifique de modèles de prédateur mangeur d'œufs ('egg-eating'), ainsi que [33, 99, 131] pour des modèles plus généraux.

Un article de Levine [92] se concentre sur l'existence d'une solution périodique en temps en faisant l'hypothèse que le taux de prédation est une fonction dépendant de l'âge, de la forme

$$b(a) = r + \lambda_1 S_1(a) + \lambda_2 S_2(a)$$

où r, λ_1, λ_2 sont des constantes strictement positives et avec plusieurs hypothèses sur les fonctions S_1 et S_2 . On peut également citer l'article de Venturino [147] où à la fois la proie et le prédateur sont structurés en âge. Les taux de prédation sont supposés dépendre de l'âge des individus. En supposant que les taux de mortalité et de reproduction de chacune des espèces dépendent de la quantité totale d'individus et sous l'hypothèse que la condition au bord est de la forme

$$x(t, 0) = \int_0^\infty a e^{-ka} (f_0 - f_1 X(t)) x(t, a) da$$

où $c, f_0, f_1 \geq 0$ sont des constantes positives et $X(t) = \int_0^\infty x(t, a) da$, il montre le caractère borné des solutions. Sous des hypothèses similaires de reproduction bornée et où la prédation dépend uniquement de la quantité totale de proies, Li [93] a étudié l'existence et la stabilité de trois équilibres correspondant à l'extinction et à la coexistence des deux espèces ainsi qu'à la persistance de la population de proies uniquement.

Dans le Chapitre 2, nous allons étudier le modèle (1.1) où la structure en âge apparaît dans les proies. Leurs taux de mortalité, de prédation et de reproduction dépendent ainsi chacun de l'âge des proies et seule l'hypothèse que ces fonctions sont bornées est considérée, rendant l'étude de ce modèle plus générale que les travaux mentionnés ci-dessus.

Récemment, basé sur le modèle de Cushing et Saleem [33] où uniquement le prédateur est structuré en âge, dans deux articles ont été analysé l'effet d'une période de maturation et d'un retard dans le processus de natalité [95, 140]. En outre, on peut également noter que certains modèles proie-prédateur ont aussi été utilisés en épidémiologie, couplés avec des modèles SI [6, 18, 35]. La taille de la proie étant reconnue comme un élément clé de la prédation sélective [139], on peut aussi étudier des modèles proie-prédateur avec une structure (continue) en taille (voir e.g. [17, 96] et les références à l'intérieur). Certains prennent également en compte une partie stochastique [76].

Avec retard

On peut également supposer que la reproduction ne se fait pas instantanément mais après un certain temps de latence. Cette considération implique ainsi d'étudier des équations à retard (voir les livres de Cushing [31] et de Smith [138] pour une introduction à de telles équations en biologie). Concernant le modèle de Lotka-Volterra, May [104] a analysé le modèle

$$\begin{cases} x'(t) &= ax(t) \left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K} \right) - bx(t)y(t), \\ y'(t) &= cx(t)y(t) - dy(t), \end{cases}$$

où le retard intervient sur le terme de capacité limite de la proie. Une application aux modèles épidémiologiques est due à Beretta, Capasso et Rinaldi [15]. Par la suite, Faria [49] a considéré le modèle

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K_1}\right) - bx(t)y(t - \tau), \\ y'(t) = cx(t - \tau)y(t) - dy(t) \left(1 + \frac{y(t)}{K_2}\right), \end{cases}$$

où le retard apparaît dans le terme de prédation, avec une étude de bifurcation de Hopf et l'analyse d'un modèle de réaction-diffusion avec retard. Les équations de Lotka-Volterra ont depuis été source de nombreux travaux (voir e.g. [100, 116, 133, 158, 159, 161] et les références à l'intérieur). Ces papiers considèrent à chaque fois la présence de capacité limite (dans la proie et/ou dans le prédateur). De plus, le retard est soit dans un terme de prédation, soit dans un terme où apparaît la capacité limite. Il n'y a eu cependant jusqu'à présent, à notre connaissance, aucun papier sur le modèle de Lotka-Volterra classique (i.e. sans capacité limite). C'est ce que nous allons étudier dans le Chapitre 5 en considérant le modèle (1.4) où le retard apparaît dans le terme de reproduction de la proie.

Remarquons enfin que l'extension du modèle de Rosenzweig-MacArthur avec de la structuration en âge n'a été faite à notre connaissance que très récemment [98], où les auteurs se placent dans un cas particulier permettant de se ramener à un modèle à retard. L'étude du modèle entier reste donc encore un problème ouvert. On peut également noter l'existence d'un article [19], où l'étude porte sur un modèle faisant le lien entre celui de Rosenzweig-MacArthur et le modèle cellulaire avec quiescence.

1.6 Principaux résultats du manuscrit

Cette section est consacrée à un résumé des principaux résultats de cette thèse.

1.6.1 Un modèle proie-prédateur structuré en âge

Dans le Chapitre 2, nous étudions un modèle proie-prédateur avec structuration en âge sur la proie comme dans [64] où l'on rajoute une dépendance en âge de la prédation et de la mortalité des proies. On note $x(t, a)$ la densité de proies d'âge a à l'instant t et $y(t)$ la densité de prédateurs, ce qui amène à étudier le système

$$\begin{cases} \partial_t x(t, a) + \partial_a x(t, a) = -\mu(a)x(t, a) - y(t)\gamma(a)x(t, a), \\ y'(t) = \alpha y(t) \int_0^\infty \gamma(a)x(t, a) da - \delta y(t), \\ x(t, 0) = \int_0^\infty \beta(a)x(t, a) da, \\ x(0, a) = x_0(a) \text{ et } y(0) = y_0, \end{cases} \quad (1.16)$$

pour tout $t \geq 0$ et $a \geq 0$. On se place dans l'espace

$$\mathcal{X} = L^1(0, \infty) \times \mathbb{R}$$

et on définit l'opérateur linéaire

$$\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$$

où

$$D(\mathcal{A}) = \{(\phi, z) \in \mathcal{X}, \phi \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+) \text{ et } \phi(0) = \int_0^\infty \beta(a)\phi(a)da\},$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{D} & 0 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix}$$

avec

$$\mathcal{D}\phi = -\phi' - \mu\phi$$

et où $W^{1,1}$ désigne l'espace de Sobolev des fonctions L^1 dont la dérivée au sens faible est également L^1 . On définit également la fonction $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ par

$$f(\phi, z) = \begin{pmatrix} -z\gamma(\cdot)\phi(\cdot) \\ \alpha z \int_0^\infty \gamma(a)\phi(a)da \end{pmatrix},$$

pour ainsi réécrire l'équation (1.16) comme le problème de Cauchy (1.9). On montre dans un premier temps que l'opérateur \mathcal{A} génère un C_0 -semigroupe à l'aide du théorème de Lumer-Phillips, puis le fait que f soit localement lipschitzienne nous donne existence et unicité de solution locale pour toute condition initiale [115]. En se servant d'arguments de perturbation comme dans [119, 120], on montre ensuite que la solution reste positive. En utilisant des estimations à priori, on en déduit que la solution est globale en temps.

Afin d'étudier le comportement asymptotique des solutions, on fait une recherche d'équilibres. On pose ainsi

$$R_0 = \int_0^\infty \beta(a)e^{-\int_0^a \mu(s)ds} da,$$

(la notation R_0 est choisie en référence au taux de reproduction discutée dans la Section 1.4.2) et

$$R_- = \int_0^{a_1} \beta(a)e^{-\int_0^a \mu(s)ds} da$$

où

$$a_1 = \sup\{a \geq 0 : |\text{supp}(\gamma) \cap (0, a)| = 0\} < +\infty.$$

On trouve alors que

1. Si $R_0 < 1$ ou si ($R_- > 1$) alors il y a un unique équilibre qui est $E_0 = (0, 0)$;
2. Si $R_0 > 1$ et $R_- < 1$ alors, outre l'équilibre trivial E_0 , apparaît l'équilibre positif $E_2 = (x_2^*, y^*)$, où y^* vérifie

$$\int_0^\infty \beta(a)e^{-\int_0^a \mu(s)ds - y^* \int_0^a \gamma(s)ds} da = 1.$$

et où

$$\begin{aligned} x_2^*(a) &= x_2^*(0)e^{-\int_0^a \mu(s)ds - y^* \int_0^a \gamma(s)ds}, \\ x_2^*(0) &= \frac{\delta}{\alpha} \left[\int_0^\infty \gamma(a)e^{-\int_0^a \mu(s)ds - y^* \int_0^a \gamma(s)ds} da \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Notons E un équilibre et la différentielle de f en ce point est donnée par

$$D_E f = \begin{pmatrix} -y^* \gamma & -\gamma x^* \\ \alpha y^* L_\gamma(\cdot) & \alpha \int_0^\infty \gamma(a) x^*(a) da \end{pmatrix}.$$

Sous l'hypothèse

$$\mu(a) \geq \mu_0 > 0, \quad \forall a \geq 0, \quad (\text{H1})$$

on montre que

$$\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A} + D_E f) \leq -\mu_0 < 0.$$

Ce qui permet d'avoir

$$\{\lambda \in \sigma(\mathcal{A} + D_E f), \text{Re } \lambda \geq 0\} = \sigma_p(\mathcal{A} + D_E f),$$

où σ_p désigne le spectre ponctuel. On est ainsi ramené, à l'aide du Théorème 1.4.3, à une étude de recherche de valeurs propres de partie réelle positive. On est alors en mesure de montrer que

1. si $R_0 < 1$, alors E_0 est globalement asymptotiquement stable dans \mathcal{X}_+ ;
2. si $R_0 > 1$, alors E_0 est instable.

On fait ensuite l'hypothèse

$$\exists \eta_1 > 0, \exists 0 < \underline{a} < \bar{a} < +\infty \text{ tels que } \beta(a) \geq \eta_1 \text{ p.p. } a \in (\underline{a}, \bar{a}), \quad (\text{H2})$$

on définit la propriété

$$\exists \eta_2 > 0, \exists 0 \leq t_1 < t_2 < \underline{a} : \int_{t_1}^{t_2} x_0(a) da \geq \eta_2. \quad (\text{P})$$

et on note \mathcal{X}_p l'ensemble défini par

$$\mathcal{X}_p = \{(x_0, y_0) \in \mathcal{X}_+, \int_0^{+\infty} x_0(a) da > 0, y_0 > 0 \text{ et vérifiant (P)}\}.$$

On montre alors que si $R_- > 1$ et si $(x_0, y_0) \in \mathcal{X}_p$, alors les populations de proies et de prédateurs explosent :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty,$$

où $X(t) = \int_0^{+\infty} x(t, a) da$ est la population totale de proies à l'instant t . Ces deux résultats sont vérifiés numériquement (voir Figures 1.2 et 1.3). Dans le cas où

$$R_0 > 1 \quad \text{et} \quad R_- < 1$$

on montre que les populations totales de proies ainsi que de prédateurs sont uniformément faiblement persistantes. À l'aide de simulations numériques, il semble qu'il y ait même de la persistance uniforme forte et que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} X(t) < +\infty \quad \text{et} \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} y(t) < +\infty.$$

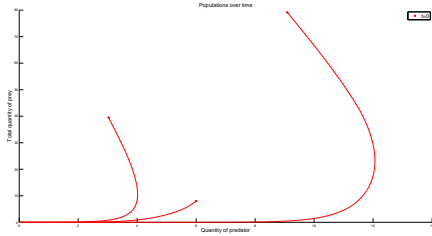


FIGURE 1.2 – Extinction des populations

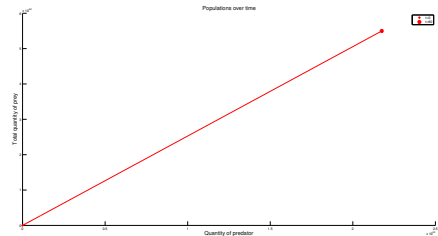


FIGURE 1.3 – Solutions non bornées

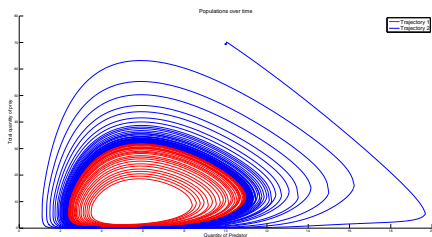


FIGURE 1.4 – Convergence vers un cycle limite

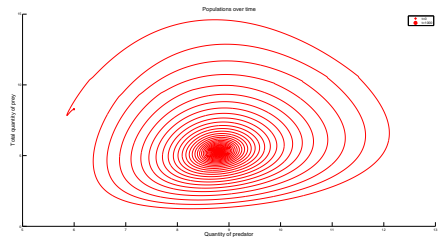


FIGURE 1.5 – Convergence vers E_2

$R_0 < 1$	$R_0 > 1$ et (P)	
Convergence vers E_0	$R_- < 1$	$R_- > 1$
	Cycle limite ou convergence vers E_2	Solutions non bornées

TABLE 1.1 – Plusieurs comportements asymptotiques

On voit en effet apparaître numériquement la convergence vers E_2 ou vers une fonction périodique (voir Figures 1.4 et 1.5). De manière schématique, on résume les différents comportements obtenus dans la Table 1.1.

La convergence vers E_2 reste hypothétique mais semble confortée numériquement. L'ensemble de ces résultats fait l'objet de l'article [121]. Nous analyserons plus en détails la stabilité de l'équilibre non trivial dans le Chapitre 5 avec l'étude d'un cas particulier permettant de se ramener à l'étude d'un système d'équations différentielles à retard. De plus, la question de savoir sous quelle condition on passe d'une convergence vers l'équilibre à une convergence vers une fonction périodique reste un problème ouvert.

1.6.2 Un modèle cellulaire à deux phases avec structure en taille

Dans le Chapitre 3, nous étudions le modèle de population structurée en taille introduit par Farkas et Hinow [50]. On considère ainsi le système d'équations linéaires de transport

$$\begin{cases} \partial_t u_1(t, s) + \partial_s(\gamma_1(s)u_1(t, s)) &= -\mu(s)u_1(t, s) + \int_0^m \beta(s, y)u_1(t, y)dy \\ &\quad -c_1(s)u_1(t, s) + c_2(s)u_2(t, s), \\ \partial_t u_2(t, s) + \partial_s(\gamma_2(s)u_2(t, s)) &= c_1(s)u_1(t, s) - c_2(s)u_2(t, s), \end{cases}$$

pour $s \in [0, m], t \geq 0$, avec des conditions aux bords de Dirichlet

$$u_1(t, 0) = 0, \quad u_2(t, 0) = 0.$$

On se place dans

$$\mathcal{X} = L^1(0, m) \times L^1(0, m)$$

puis on définit l'opérateur linéaire

$$\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$$

par

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(\gamma_1 u_1)' \\ -(\gamma_2 u_2)' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(\mu + c_1)u_1 + c_2 u_2 + \int_0^m \beta(\cdot, y)u_1(y)dy \\ -c_2 u_2 + c_1 u_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et où le domaine de \mathcal{A} est donné par

$$D(\mathcal{A}) = \{(u_1, u_2) \in W^{1,1}(0, m) \times W^{1,1}(0, m) : u_1(0) = 0, u_2(0) = 0\}.$$

On montre ainsi que le problème est bien posé dans \mathcal{X} . Comme expliqué précédemment, un des points clés pour étudier le caractère de croissance exponentielle asynchrone est l'irréductibilité du semigroupe. Dans [50], les auteurs l'obtiennent sous les hypothèses

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \int_0^\varepsilon \int_{m-\varepsilon}^m \beta(s, y)dyds > 0$$

et

$$\inf \text{supp } c_1 = 0, \quad \sup \text{supp } c_2 = m.$$

Ici, on montre que le semigroupe est irréductible *si et seulement si* l'hypothèse

$$\forall \varepsilon \in (0, m), \int_0^\varepsilon \int_\varepsilon^m \beta(s, y) dy ds > 0, \quad \inf \text{supp } c_1 = 0, \quad \sup \text{supp } c_2 = m, \quad (1.17)$$

est vérifiée. Cette propriété n'est à priori pas évidente à montrer à cause des conditions aux bords de Dirichlet homogènes que l'on a choisies. On décompose dans un premier temps B en trois opérateurs :

$$\begin{aligned} B \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= B_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + B_2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + B_3 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(\mu + c_1)u_1 \\ -c_2 u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 u_2 \\ c_1 u_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^m \beta(\cdot, y) u_1(y) dy \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on montre que le spectre de $A + B_1 + B_2$ est vide, d'où

$$s(A + B_1 + B_2) = -\infty.$$

On montre ensuite que la borne spectrale de \mathcal{A} est finie (i.e. $s(\mathcal{A}) > -\infty$) si et seulement si

$$\exists \delta \in (0, m) : \int_0^\delta \int_\delta^m \beta(s, y) dy ds > 0. \quad (1.18)$$

Pour cela on définit les opérateurs

$$A_1 : D(A_1) \ni u \mapsto -(\gamma_1 u)' \in L^1(0, m), \quad K : L^1(0, m) \ni u \mapsto \int_0^m \beta(\cdot, y) u(y) dy \in L^1(0, m)$$

où

$$D(A_1) = \{u \in W^{1,1}(0, m) : u(0) = 0\}.$$

L'hypothèse (1.18) assure l'existence d'un point $\delta_2 \in (\delta, m)$ pour que l'opérateur

$$\chi_{[\delta, \delta_2]}(\lambda - (A_1 + K))|_{L^1(\delta, \delta_2)}^{-1}$$

soit irréductible et compact, avec $\chi_{[\delta, \delta_2]}$ la fonction indicatrice sur $[\delta, \delta_2]$ et où $L^1(\delta, \delta_2)$ est le sous-espace de $L^1(\mathbb{R}_+)$ des fonctions valant 0 en dehors de (δ, δ_2) . Ces deux propriétés impliquent grâce au théorème de de Pagter (voir Théorème A.4.7) que

$$r_\sigma \left(\chi_{[\delta, \delta_2]}(\lambda - (A_1 + K))|_{L^1(\delta, \delta_2)}^{-1} \right) > 0,$$

où r_σ désigne le rayon spectral. Par perturbation positive on en déduit que

$$r_\sigma((\lambda - \mathcal{A})^{-1}) \geq r_\sigma \left(\chi_{[\delta, \delta_2]}(\lambda - (A_1 + K))|_{L^1(\delta, \delta_2)}^{-1} \right) > 0.$$

Le fait que

$$r_\sigma((\lambda - \mathcal{A})^{-1}) = \frac{1}{\lambda - s(\mathcal{A})}$$

implique ainsi

$$s(\mathcal{A}) > -\infty.$$

On suppose ensuite que K est faiblement compact, i.e. qu'il envoie tout borné de \mathcal{X} sur une partie relativement faiblement compacte de \mathcal{X} (voir Section A.3 pour plus de détails).

On montre que le semigroupe généré par \mathcal{A} a la propriété de croissance exponentielle asynchrone sous l'hypothèse (1.17) (la faible compacité de K est assurée par exemple s'il existe $\tilde{\beta} \in L^1(0, m)$ telle que

$$\beta(s, y) \leq \tilde{\beta}(s) ;$$

en particulier, elle est satisfaite si β est continue sur $[0, m]^2$). Les semigroupes $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ et $\{T_2(t)\}_{t \geq 0}$ générés respectivement par \mathcal{A} et $\mathcal{A} + B_1 + B_2$ sont liés par la formule de Duhamel

$$U(t) = T_2(t) + \int_0^t T_2(t-s)B_3U(s)ds.$$

Puisque B_3 est faiblement compact, alors $T_2(t-s)B_3U(s)$ l'est aussi pour tout $s \geq 0$. L'intégrale forte

$$\int_0^t T_2(t-s)B_3U(s)ds$$

est donc un opérateur faiblement compact [137]. Ainsi, $U(t) - T_2(t)$ est faiblement compact et, par conséquent [108], les semigroupes $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ et $\{T_2(t)\}_{t \geq 0}$ ont le même spectre essentiel et donc le même type essentiel

$$\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A}) = \omega_{\text{ess}}(A + B_1 + B_2).$$

Puisque $A + B_1 + B_2$ génère un C_0 -semigroupe positif dans L^1 , son type et sa borne spectrale sont égaux. Ainsi, on obtient

$$\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A}) \leq s(A + B_1 + B_2) = -\infty.$$

On en déduit alors que

$$-\infty = \omega_{\text{ess}}(\mathcal{A}) < s(\mathcal{A}) = \omega_0(\mathcal{A}).$$

Ce *gap spectral* combiné à l'irréductibilité du semigroupe explique ainsi le comportement de croissance exponentielle asynchrone. Dans [50], le gap spectral est obtenu sous l'hypothèse plus forte que $\beta \in \mathcal{C}([0, m]^2)$ et qu'il existe $0 \leq s^* < y^* \leq m$ tel que

$$\beta(s^*, y^*) > 0.$$

Dans le cas où l'hypothèse de gap spectral (1.18) est vérifiée, mais où celle de l'irréductibilité (1.17) ne l'est pas, le semigroupe possède le comportement décrit par (1.13). La question de savoir si la borne spectrale $s(\mathcal{A})$ est semi-simple (i.e. que le semigroupe a la propriété asynchrone) est un problème ouvert.

On se place ensuite dans le cas où la taille maximale des cellules est infinie. On étudie ainsi dans la Section 3.2 le modèle suivant, qui ne semble pas avoir été étudié jusqu'ici

$$\begin{cases} \partial_t u_1(t, s) + \partial_s(\gamma_1(s)u_1(t, s)) &= -\mu(s)u_1(t, s) + \int_0^\infty \beta(s, y)u_1(t, y)dy \\ &\quad -c_1(s)u_1(t, s) + c_2(s)u_2(t, s), \\ \partial_t u_2(t, s) + \partial_s(\gamma_2(s)u_2(t, s)) &= c_1(s)u_1(t, s) - c_2(s)u_2(t, s), \end{cases}$$

pour $s, t \geq 0$, et les mêmes conditions aux bords (de Dirichlet) que dans le cas fini. On se place dans

$$\mathcal{X}^\infty = (L^1(0, \infty) \times L^1(0, \infty), \|\cdot\|_{\mathcal{X}^\infty})$$

muni de la norme

$$\|(x_1, x_2)\|_{\mathcal{X}^\infty} = \|x_1\|_{L^1(0, \infty)} + \|x_2\|_{L^1(0, \infty)}.$$

On définit

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^\infty \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= A^\infty \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + B^\infty \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(\gamma_1 u_1)' \\ -(\gamma_2 u_2)' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(\mu + c_1)u_1 + c_2 u_2 + \int_0^\infty \beta(\cdot, y)u_1(y)dy \\ -c_2 u_2 + c_1 u_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où le domaine de A^∞ est donné par

$$D(A^\infty) = \{(u_1, u_2) \in W^{1,1}(0, \infty) \times W^{1,1}(0, \infty) : u_1(0) = 0, u_2(0) = 0\}.$$

On décompose ensuite B^∞ en

$$\begin{aligned} B^\infty \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= B_1^\infty \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + B_2^\infty \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + B_3^\infty \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(\mu + c_1)u_1 \\ -c_2 u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 u_2 \\ c_1 u_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^\infty \beta(\cdot, y)u_1(y)dy \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De manière similaire, on montre que le problème est bien posé et que le semigroupe généré par \mathcal{A}^∞ est irréductible *si et seulement si* l'hypothèse

$$\forall \varepsilon \in (0, \infty), \int_0^\varepsilon \int_\varepsilon^\infty \beta(s, y)dyds > 0, \quad \inf \text{supp } c_1 = 0, \quad \sup \text{supp } c_2 = \infty. \quad (1.19)$$

est vérifiée. Considérons les opérateurs

$$\bar{B}_3^\infty = \frac{B_3^\infty}{2}, \quad \bar{\mathcal{B}}^\infty = A^\infty + B_1^\infty + B_2^\infty + \bar{B}_3^\infty,$$

et supposons que B_3^∞ est faiblement compact. On montre alors que sous l'hypothèse (1.19), le semigroupe présente un gap spectral *si et seulement si*

$$\lim_{\lambda \rightarrow s(\bar{\mathcal{B}}^\infty)} r_\sigma(\bar{B}_3^\infty (\lambda - \bar{\mathcal{B}}^\infty)^{-1}) > 1. \quad (1.20)$$

Alors le semigroupe généré par A^∞ a la propriété de croissance exponentielle asynchrone.

On remarque dans un premier temps que la fonction

$$(s(\bar{\mathcal{B}}^\infty), +\infty) \ni \lambda \mapsto r_\sigma(\bar{B}_3^\infty (\lambda - \bar{\mathcal{B}}^\infty)^{-1})$$

est convexe et donc continue [108]. En utilisant un raisonnement similaire au cas fini et à l'aide du théorème de de Pagter, on montre que

$$r_\sigma(\bar{B}_3^\infty (\lambda - \bar{\mathcal{B}}^\infty)^{-1}) > 0 \quad (\lambda > s(\bar{\mathcal{B}}^\infty)). \quad (1.21)$$

Alors la fonction

$$(s(\bar{\mathcal{B}}^\infty), +\infty) \ni \lambda \mapsto r_\sigma(\bar{B}_3^\infty (\lambda - \bar{\mathcal{B}}^\infty)^{-1})$$

est en fait *strictement décroissante* [108]. D'après l'hypothèse (1.20) il existe un unique

$$\bar{\lambda} > s(\bar{\mathcal{B}}^\infty)$$

tel que

$$r_\sigma(\overline{B}_3^\infty(\bar{\lambda} - \overline{B}^\infty)^{-1}) = 1.$$

Puisque $\overline{B}_3^\infty(\bar{\lambda} - \overline{B}^\infty)^{-1}$ est positif et à puissance compacte, alors

$$1 = r_\sigma(\overline{B}_3^\infty(\bar{\lambda} - \overline{B}^\infty)^{-1})$$

est une valeur propre isolée de $\overline{B}_3^\infty(\bar{\lambda} - \overline{B}^\infty)^{-1}$ et on montre que $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de \mathcal{A}^∞ . Comme dans le cas fini, la faible compacité de \overline{B}_3^∞ implique

$$\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A}^\infty) = \omega_{\text{ess}}(\overline{B}^\infty).$$

et par conséquent

$$\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A}^\infty) \leq s(\overline{B}^\infty) < \bar{\lambda} = s(\mathcal{A}^\infty).$$

Le comportement asynchrone découle ainsi de l'irréductibilité et de l'existence d'un gap spectral. Vérifier quand est-ce que la condition (1.20) est vérifiée, c'est-à-dire quand il y a un gap spectral, reste un problème ouvert. Dans plusieurs cas particuliers, on arrive à obtenir des majorations de la borne spectrale. On montre par exemple que si, pour tout $y \geq 0$, on a

$$\int_0^\infty \beta(s, y) ds \geq \mu(y)$$

et si

$$\liminf_{s \rightarrow +\infty} \mu(s) > 0, \quad \liminf_{s \rightarrow +\infty} c_2(s) > 0,$$

alors

$$s(\mathcal{A}^\infty) \geq 0 \text{ et } s(\overline{B}^\infty) < 0$$

d'où l'existence d'un *gap spectral*. On montre aussi que si, pour tout $y \geq 0$, on a

$$\int_0^\infty \beta(s, y) ds \leq \mu(y)$$

et si

$$\limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} \int_0^s c_2(z) dz = 0$$

alors

$$s(\mathcal{A}^\infty) = 0, \quad s(\overline{B}^\infty) = 0,$$

et il n'y a donc pas de gap spectral dans ce cas. On explicite ainsi plusieurs cas concrets où apparaît ou non la propriété de croissance exponentielle asynchrone de \mathcal{A}^∞ . Lorsqu'il y a un gap spectral mais que l'hypothèse d'irréductibilité (1.19) n'est pas vérifiée alors la question de savoir si le semigroupe a la propriété asynchrone est, comme dans le cas fini, un problème ouvert.

1.6.3 Un modèle de transport-diffusion structuré en taille

Le Chapitre 4 est consacré au modèle de population structurée en taille étudié par Farkas et Hinow dans [51]. On considère ainsi l'équation linéaire de transport/diffusion suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, s) + \partial_s(\gamma(s)u(t, s)) &= \partial_s(d(s)\partial_s(u(t, s))) - \mu(s)u(t, s) \\ &+ \int_0^m \beta(s, y)u(t, y)dy, \end{aligned} \quad (1.22)$$

où $u(t, s)$ dénote la densité d'individus de taille $s \in [0, m]$ au temps $t \geq 0$ pour $m < +\infty$. À cela sont rajoutées des conditions aux bords de Feller en $s = 0$ et $s = m$:

$$[\partial_s(d(s)\partial_s u(t, s))]_{s=0} - b_0\partial_s u(t, 0) + c_0u(t, 0) = 0, \quad (1.23)$$

$$[\partial_s(d(s)\partial_s u(t, s))]_{s=m} + b_m\partial_s u(t, m) + c_mu(t, m) = 0, \quad (1.24)$$

et on suppose que

$$b_0 - \gamma(0) > 0, \quad b_m + \gamma(m) > 0. \quad (1.25)$$

Sous certaines hypothèses sur les fonctions, on réécrit les équations (1.22)-(1.23)-(1.24) sous la forme matricielle

$$\begin{cases} U'(t) &= \mathcal{A}U(t), \\ U(0) &= (u^0, u_0^0, u_m^0) \in \mathcal{X}, \end{cases} \quad (1.26)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \begin{pmatrix} u \\ u_0 \\ u_m \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} u \\ u_0 \\ u_m \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} u \\ u_0 \\ u_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (du')' - (\gamma u)' - \mu u \\ (b_0 - \gamma(0))u'(0) - \rho_0 u_0 \\ -(b_m + \gamma(m))u'(m) - \rho_m u_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^m \beta(\cdot, y)u(y)dy \\ \int_0^m \beta_0(y)u(y)dy \\ \int_0^m \beta_m(y)u(y)dy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on montre que le problème est bien posé au sens de la théorie des semigroupes dans l'espace

$$\mathcal{X} = (L^1(0, m) \times \mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$$

muni de la norme

$$\|(x, x_0, x_m)\|_{\mathcal{X}} = \|x\|_{L^1(0, m)} + c_1|x_0| + c_2|x_m|$$

où

$$c_1 = \frac{d(0)}{b_0 - \gamma(0)}, \quad c_2 = \frac{d(m)}{b_m + \gamma(m)}.$$

En fait, pour montrer le caractère bien posé du problème de Cauchy (1.26), l'opérateur K peut être ignoré en utilisant des arguments de perturbation bornée. Dans [51], les auteurs définissent d'abord A sur les fonctions *régulières*

$$A_s : D(A_s) \rightarrow \mathcal{X} \quad (1.27)$$

où

$$D(A_s) = \{(u, u_0, u_m) \in C^2[0, m] \times \mathbb{R}^2 : u(0) = u_0, u(m) = u_m\}$$

et montrent la *dissipativité* de A_s . Ils se réfèrent ensuite à la théorie des équations elliptiques [60] pour montrer que la *fermeture* de A_s , notée A , est un générateur. Un tel argument ne donne à priori aucune information sur le domaine de A à part le fait que

$$D(A) \supset D(A_s).$$

Les auteurs affirment que le générateur A est à résolvante compacte car l'injection de $W^{1,1}[0, m]$ dans $L^1(0, m)$ est compacte mais ils ne montrent pas que le domaine de A

est inclus dans $W^{1,1}[0, m]$. Il y a donc à priori une lacune dans leur preuve que A est à résolvante compacte. Ici, on définit A sur un *domaine explicite*

$$D(A) = \{(u, u_0, u_m) \in W^{2,1}(0, m) \times \mathbb{R}^2 : u(0) = u_0, u(m) = u_m\},$$

où $W^{2,1}$ désigne l'espace de Sobolev des fonctions L^1 dont les dérivées au sens faible d'ordre un et deux sont également dans L^1 . En effet, en plus des arguments de dissipativité de [51], on montre directement que l'opérateur est fermé, densément défini et qu'il satisfait la condition du surjectivité. Ainsi, on donne un résultat de génération avec un générateur explicite. En particulier, la connaissance de $D(A)$ permet d'affirmer que A est à résolvante compacte.

Dans [51], les auteurs montrent que $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ est irréductible sous l'hypothèse que β est continue sur $[0, m]^2$ et

$$\beta(., .) > 0. \tag{1.28}$$

On montre ici que l'hypothèse (1.28) de stricte positivité n'est pas nécessaire. En effet,

$$e^{tA} \geq e^{tA}$$

et on montre que $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ est irréductible en utilisant le principe du maximum de Hopf. En particulier, $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ est irréductible même si $\beta = 0$. Le fait que la résolvante $(\lambda - \mathcal{A})^{-1}$ soit compacte et irréductible implique grâce au théorème de de Pagter que

$$r_\sigma((\lambda - \mathcal{A})^{-1}) > 0.$$

De plus, comme

$$r_\sigma((\lambda - \mathcal{A})^{-1}) = \frac{1}{\lambda - s(\mathcal{A})}$$

alors $s(\mathcal{A}) > -\infty$. Puisque la borne spectrale d'un opérateur positif de L^1 appartient à son spectre [108], alors l'existence d'une valeur propre réelle algébriquement simple de \mathcal{A} est assurée.

Nous traitons ensuite un problème plus délicat. En effet, dans [51] les auteurs déduisent du fait que \mathcal{A} est à résolvante compacte et que $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ est irréductible, que $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ converge (en norme d'opérateur) exponentiellement vers le projecteur spectral P associé à la valeur propre dominante $\hat{\lambda}$ de \mathcal{A}

$$e^{-t\hat{\lambda}} e^{tA} \rightarrow P \quad (t \rightarrow \infty).$$

À priori, une telle preuve n'est pas complète. En effet, cette conclusion peut être obtenue uniquement si l'on sait que le semigroupe $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ a un *gap spectral*, ce qui n'est pas du tout une conséquence de la compacité de la résolvante de \mathcal{A} et de l'irréductibilité de $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$. En fait, on a besoin d'étudier le spectre du semigroupe $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ lui-même. On peut montrer cette propriété en utilisant des outils développés dans le contexte de théorie de Transport [108, 110]. En supposant que K est faiblement compact, on montre en premier lieu que

$$\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A}) = \omega_{\text{ess}}(A) \leq s(A);$$

Deuxièmement, on suppose que

$$K \neq 0$$

i.e. $\beta(.,.)$ n'est pas égale à 0 presque partout. Alors le fait que la résolvante $(\lambda - \mathcal{A})^{-1}$ soit compacte et irréductible, et que

$$(\lambda - A)^{-1} \leq (\lambda - \mathcal{A})^{-1}, \quad 0 \leq (\lambda - A)^{-1} \neq (\lambda - \mathcal{A})^{-1}$$

nous permet d'utiliser le théorème de Marek (voir Théorème A.4.9) pour en déduire

$$r_\sigma((\lambda - A)^{-1}) < r_\sigma((\lambda - \mathcal{A})^{-1}).$$

On obtient ainsi

$$\frac{1}{\lambda - s(A)} < \frac{1}{\lambda - s(\mathcal{A})}$$

pour λ assez grand et donc

$$s(A) < s(\mathcal{A}).$$

Ceci implique que $\{e^{t\mathcal{A}}\}_{t \geq 0}$ possède un gap spectral

$$\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A}) < \omega_0(\mathcal{A}).$$

Le fait que

$$e^{-ts(A)} e^{t\mathcal{A}} \rightarrow P \quad (t \rightarrow \infty)$$

exponentiellement n'est donc qu'une conséquence de l'irréductibilité de $\{e^{t\mathcal{A}}\}_{t \geq 0}$ et de l'existence d'un gap spectral.

On généralise ensuite la théorie au cas

$$m = \infty$$

permettant des tailles arbitraires pour la taille des cellules, c'est-à-dire que l'on étudie également dans la Section 4.2 le modèle suivant qui ne semble pas avoir été étudié jusqu'ici

$$\partial_t(t, s) + \partial_s(\gamma(s)u(t, s)) = \partial_s(d(s)\partial_s u(t, s)) - \mu(s)u(t, s) + \int_0^\infty \beta(s, y)u(t, y)dy, \quad (1.29)$$

$$[\partial_s(d(s)\partial_s u(t, s))]_{s=0} - b_0\partial_s u(t, 0) + c_0u(t, 0) = 0. \quad (1.30)$$

$$\mathcal{X}_\infty = (L^1(0, +\infty) \times \mathbb{R}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}_\infty})$$

se trouve être bien plus complexe. En effet, l'opérateur étudié est

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\infty \begin{pmatrix} u \\ u_0 \end{pmatrix} &= A_\infty \begin{pmatrix} u \\ u_0 \end{pmatrix} + K_\infty \begin{pmatrix} u \\ u_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (du')' - (\gamma u)' - \mu u \\ (b_0 - \gamma(0))u'(0) - \rho_0 u_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^\infty \beta(., y)u(y)dy \\ \int_0^\infty \beta_0(y)u(y)dy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de domaine $D(\mathcal{A}_\infty)$ donné par

$$\{(u, u_0) \in \mathcal{X}_\infty; u \in W_{loc}^{2,1}(\mathbb{R}_+), u(0) = u_0, (du')' - (\gamma u)' \in L^1(\mathbb{R}_+) \text{ et } \lim_{s \rightarrow +\infty} d(s)u'(s) - \gamma(s)u(s) = 0\}.$$

À priori, le domaine du générateur est plus grand que l'espace

$$\{(u, u_0) \in W^{2,1}(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}; u(0) = u_0\}$$

mais on montre que cet espace est un cœur de $D(\mathcal{A}_\infty)$ (i.e. un sous-espace fermé pour la norme du graphe).

Comme précédemment, l'irréductibilité du semigroupe est montrée en utilisant le principe du maximum de Hopf. De manière similaire, si

$$L^1(\mathbb{R}_+) \ni u \rightarrow \int_0^\infty \beta(\cdot, y)u(y)dy \in L^1(\mathbb{R}_+)$$

est faiblement compact alors les semigroupes $\{e^{tA_\infty}\}_{t \geq 0}$ et $\{e^{tA_\infty}\}_{t \geq 0}$ ont le même type essentiel. D'autre part, on ne peut pas faire appel aux arguments de Marek pour en déduire l'existence d'un *gap spectral*, car \mathcal{A}_∞ n'est à priori pas à résolvante compacte. Dans ce cas, on montre que la propriété de *gap spectral*

$$\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A}) < s(\mathcal{A}_\infty)$$

est satisfaite s'il existe un ensemble mesurable $I \subset \mathbb{R}_+$ de mesure strictement positive tel que

$$u \in L^1(\mathbb{R}_+), u(y) > 0 \text{ p.p.} \implies \int_0^\infty \beta(s, y)u(y)dy > 0 \text{ p.p. } s \in I.$$

et si

$$\lim_{\lambda \rightarrow s(\mathcal{A}_\infty)} r_\sigma(K_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1}) > 1. \quad (1.31)$$

On ne sait pas si (1.31) est toujours satisfaite. En particulier, on ne sait pas si

$$\lim_{\lambda \rightarrow s(A)} r_\sigma(K(\lambda - A)^{-1}) = +\infty \quad (1.32)$$

est toujours vérifiée. On peut noter que si

$$\eta := \lim_{\lambda \rightarrow s(\mathcal{A}_\infty)} r_\sigma(K_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1}) < +\infty \quad (1.33)$$

alors le semigroupe généré par

$$A_\infty + cK_\infty$$

a un gap spectral dès que

$$c > \eta^{-1}.$$

Déterminer laquelle de (1.32) ou (1.33) a lieu en général est un problème ouvert. On peut aussi donner des conditions suffisantes en terme de norme. En effet, si β est minorée par un noyau séparable

$$\beta(x, y) \geq \beta_1(x)\beta_2(y) \quad (1.34)$$

alors on montre que

$$r_\sigma(K_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1}) \geq \left\| \beta_2 \left((\lambda - A_\infty)^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1(0) \end{pmatrix} \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}$$

où $(U)_1$ se réfère à la première composante de $U \in \mathcal{X}_\infty$. En particulier, (1.31) est satisfaite si

$$\lim_{\lambda \rightarrow s(\mathcal{A}_\infty)} \left\| \beta_2 \left((\lambda - \mathcal{A}_\infty)^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1(0) \end{pmatrix} \right)_1 \right\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} > 1.$$

On note que (1.34) est vérifiée si β est continue à un point quelconque (\bar{x}, \bar{y}) avec $\beta(\bar{x}, \bar{y}) > 0$. Ces résultats font l'objet de l'article [111].

Dans la Section 4.3, on montre que (1.31) est vérifiée dans le cas particulier où les fonctions d, γ, μ sont constantes, avec $d > 0, \mu \geq 0$ et où β vérifie (1.34). En effet, sous ces hypothèses, on peut donner explicitement l'expression de la résolvante, étant donné qu'on résout une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. On est alors en mesure de montrer que

$$s(\mathcal{A}_\infty) = -\mu.$$

On calcule ensuite

$$\left\| \beta_2 \left((\lambda - \mathcal{A}_\infty)^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1(0) \end{pmatrix} \right)_1 \right\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}$$

puis on montre que (1.32) est vérifiée. Ainsi, quelle que soit la valeur des constantes, le semigroupe généré par \mathcal{A}^∞ a le comportement de croissance exponentielle asynchrone.

1.6.4 Un modèle proie-prédateur à retard

Le Chapitre 5 reprend le modèle de Lotka-Volterra structuré en âge (1.16) avec l'idée d'étudier le comportement obtenu sur la Figure 1.5. On considère les fonctions

$$\mu \equiv \mu_0, \quad \beta(a) = \beta_0 \chi_{[\tau, +\infty)}(a), \quad \gamma(a) = \gamma_0 \chi_{[\tau, +\infty)}(a),$$

où $\tau > 0$. Afin d'être dans le cas où la convergence vers l'équilibre non trivial semble possible, on calcule les seuils définis dans le Chapitre 2 et on trouve

$$R_0 = \frac{\beta_0 e^{-\mu_0 \tau}}{\mu_0}, \quad a_1 = \tau, \quad R_- = 0.$$

On suppose donc que

$$R_0 > 1.$$

Une intégration formelle de (1.16) nous amène à étudier le système différentiel à retard

$$\begin{cases} X'(t) &= \beta_0 e^{-\mu_0 \tau} X(t - \tau) - \mu_0 X(t) - \gamma_0 X(t)y(t), \\ y'(t) &= \alpha \gamma_0 X(t)y(t) - \delta y(t), \end{cases} \quad (1.35)$$

où $X(t) = \int_\tau^\infty x(t, a) da$, qui est en fait un modèle de Lotka-Volterra à retard. On se place alors dans l'espace

$$\mathcal{X} = \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$$

muni de la norme

$$\|(u, v)\|_{\mathcal{X}} = \|u\|_\infty + |v|$$

et on pose pour condition initiale

$$X(\theta) = \phi(\theta), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0], \quad y(0) = y_0,$$

avec $(\phi, y_0) \in \mathcal{X}$. On obtient ainsi deux équilibres

$$\overline{E}_0 := (0, 0) \in \mathcal{X}, \quad \overline{E}^* := (X^* \chi_{[-\tau, 0]}, y^*) \in \mathcal{X},$$

où

$$(X^*, y^*) = \left(\frac{\delta}{\alpha \gamma_0}, \frac{\beta_0 e^{-\mu_0 \tau} - \mu_0}{\gamma_0} \right)$$

et où \overline{E}^* existe (et est unique) si et seulement si $R_0 > 1$. On considère ensuite les ensembles

$$S_2 = \{(\phi, y) \in \mathcal{X}_+ : y > 0, \int_{-\tau}^0 \phi(a) da > 0\},$$

$$S_3 = \{(\phi, y) \in \mathcal{X}_+ : y > 0, \phi(a) > 0 \forall a \in [-\tau, 0]\} \subset S_2.$$

En utilisant quelques majorations, on montre que l'ensemble S_3 est positivement invariant, c'est-à-dire que

$$\Phi_t(z) \in S_3, \quad \forall z \in S_3, \forall t \geq 0.$$

De plus, l'ensemble S_2 est $(2\tau, S_3)$ -positivement invariant au sens où, pour tout $z \in S_2$, alors

$$\Phi_t(z) \in S_3, \quad \forall t \geq 2\tau.$$

Ainsi tous les résultats qui sont montrés par la suite pour des conditions initiales dans S_3 peuvent en fait être étendus à S_2 . On pose ensuite

$$g(x) = x - \ln(x) - 1$$

et on montre que la fonction

$$L_* : \mathcal{X} \ni (\phi, y) \mapsto V_1(\phi, y) + V_2(\phi, y) + V_3(\phi, y) \in \mathcal{X}$$

est une fonction de Lyapunov sur S_3 , où l'on a

$$V_1(\phi, y) = \alpha X^* g\left(\frac{\phi(0)}{X^*}\right), \quad V_2(\phi, y) = y^* g\left(\frac{y}{y^*}\right),$$

$$V_3(\phi, y) = \alpha \beta_0 e^{-\mu_0 \tau} X^* \int_{-\tau}^0 g\left(\frac{\phi(s)}{X^*}\right) ds.$$

En effet, quelques calculs nous permettent de montrer que

$$\partial_t [L_*(\Phi_t(z))] = -\alpha \beta_0 X^* g\left(\frac{X(t-\tau)}{X(t)}\right) \leq 0$$

pour tout $z := (\phi, y_0) \in S_3$. De plus, l'invariance de S_3 implique que L_* est bien une fonction de Lyapunov. Puisque la fonction positive

$$F_{(\phi, y_0)} : t \mapsto L_*(\Phi_t(\phi, y_0))$$

est décroissante pour tout $z := (\phi, y_0) \in S_3$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

alors pour tout $z \in S_3$, la solution du problème (1.35) est bornée. Le caractère borné et le fait que L^* soit une fonction de Lyapunov sur S_3 implique [138] que pour tout $z \in S_3$, l'ensemble $\omega(z)$ est non vide et est contenu dans le sous-ensemble invariant maximal de

$$\{v := (\phi, y_0) \in S_3 : \partial_t[L_*(\Phi_t(v))] = 0, \forall t \geq 0\}.$$

Or, on voit que la dérivée s'annule si et seulement si

$$X(t - \tau) = X(t), \quad \forall t \geq 0,$$

donc $\omega(z)$ est inclus dans

$$\{v := (\phi, y_0) \in S_3 : \Phi_t^x(v) = \Phi_{t+\tau}^x(v), \forall t \geq 0\},$$

où Φ^x dénote la première composante du semiflot Φ . Par conséquent, X converge soit vers une solution constante, soit vers une fonction τ -périodique. On rappelle que, dans le modèle général (1.16), la convergence vers l'équilibre non trivial ou une fonction périodique n'est montrée que numériquement. On en déduit alors que la solution (X, y) de (1.35) converge soit vers un des équilibres, soit vers une fonction τ -périodique. On montre ensuite qu'il existe une solution τ -périodique de (1.35) *si et seulement si* l'hypothèse

$$\frac{\tau \sqrt{\delta y^* \gamma_0}}{2\pi} > 1 \tag{1.36}$$

est vérifiée (et dans ce cas, la solution est unique). Pour le montrer, il faut voir qu'une fonction τ -périodique est solution de (1.35) si et seulement si elle est solution du modèle EDO de Lotka-Volterra. Ensuite, on considère le modèle (1.15), on prend une condition initiale $(x^0, y^0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et on définit l'énergie

$$E = cx^0 - d + by^0 - a - a \ln \left(\frac{by^0}{a} \right) - d \ln \left(\frac{cx^0}{d} \right).$$

La solution de (1.15) est périodique et la période (notée T) dépend de E . En fait [128], la fonction $E \mapsto T(E)$ est strictement croissante et

$$\lim_{E \rightarrow 0} T(E) = \frac{2\pi}{\sqrt{ad}}, \quad \lim_{E \rightarrow \infty} T(E) = \infty.$$

En remplaçant les paramètres, on obtient ainsi

$$T \geq \frac{2\pi}{\sqrt{(\beta_0 e^{-\mu_0 \tau} - \mu_0) \delta}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\delta \gamma_0 y^*}}.$$

Par conséquent, pour obtenir $T = \tau$ il faut que l'hypothèse (1.36) soit vérifiée. Dans le cas contraire, la stricte croissance de la fonction $E \mapsto T(E)$ donne l'existence et l'unicité d'une solution τ -périodique pour le modèle EDO et par conséquent du modèle à retard. Ainsi, on en déduit que, pour toute condition initiale $z \in S_3$:

1. si (1.36) n'est pas vérifiée alors

$$\omega(z) \subset \{\overline{E^*}\} \cup \{\overline{E_0}\};$$

2. si (1.36) est vérifiée alors

$$\omega(z) \subset \{\overline{E^*}\} \cup \{\overline{E_0}\} \cup S_\tau;$$

où $S_\tau \subset S_3$ est le sous-ensemble τ -périodique de S_3 .

On montre ensuite que l'équilibre $\overline{E_0}$ est *fortement inattentif*. Pour cela, on considère une condition initiale $(\phi, y_0) \in S_3$. Le fait que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$$

implique que, si $\overline{E_0}$ était localement attractif, alors on aurait

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_{(\phi, y_0)}(t) = +\infty$$

ce qui contredit le caractère borné des solutions. Ainsi, pour toute condition initiale $z \in S_3$, on obtient

$$\omega(z) = \{\overline{E^*}\}.$$

La stabilité au sens de Lyapunov de l'équilibre $\overline{E^*}$ est ensuite démontrée directement en utilisant la définition et du fait que L^* est une fonction de Lyapunov. La stabilité et l'attractivité de $\overline{E^*}$ impliquent enfin la stabilité asymptotique globale de $\overline{E^*}$ dans S_3 (et donc dans S_2) lorsque (1.36) n'est pas vérifiée. On peut enfin revenir au problème initial (1.16) et considérer l'ensemble

$$\mathcal{X}_A = \{(x_0, y_0) \in L^1_+(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+^* : \int_0^\infty x_0(a) da > 0\}.$$

On est alors en mesure de montrer que, si $\overline{E^*}$ est globalement asymptotiquement stable dans S_2 , alors l'équilibre E_2 du problème (1.16) est globalement attractif dans \mathcal{X}_A . Il faut en effet voir que si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = X^*, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y^*$$

alors cela implique pour le modèle EDP que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, 0) = \beta_0 X^*$$

et on montre grâce à la méthode des caractéristiques que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, a) = x^*(a)$$

pour tout $a \geq 0$. L'attractivité de $E_2 = (x^*, y^*)$ en découle ainsi. Déterminer si $\overline{E^*}$ est globalement attractif dans $S_2 \setminus S_\tau$ lorsque

$$\frac{\tau \sqrt{\delta y^* \gamma_0}}{2\pi} > 1$$

est un problème ouvert.

Première partie

Étude d'équations de transport en dynamique des populations

Chapitre 2

Implication of age-structure on the dynamics of Lotka Volterra equations

2.1 Introduction

In this Chapter we consider the following predator-prey system

$$\begin{cases} \partial_t x(t, a) + \partial_a x(t, a) &= -\mu(a)x(t, a) - y(t)\gamma(a)x(t, a), \\ y'(t) &= \alpha y(t) \int_0^\infty \gamma(a)x(t, a) da - \delta y(t), \\ x(t, 0) &= \int_0^\infty \beta(a)x(t, a) da \quad \forall t \geq 0, \\ x(0, a) &= x_0(a) \quad \forall a \geq 0 \text{ and } y(0) = y_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

with $x(t, a)$ and $y(t)$ that are respectively the density of preys at age $a \geq 0$ and time $t \geq 0$ and the density of predators at time t where :

- $\alpha \in (0, 1)$, $\delta > 0$ are constant parameters that respectively denote the assimilation coefficient of ingested preys and the basic mortality rate of the predator ;
- $\mu, \gamma, \beta \in L_+^\infty(\mathbb{R}_+)$ are age-dependent functions that represent the basic mortality rate of the preys, the predation rate and the birth rate for the preys.

In all that follows, we assume the following on parameter μ :

$$\exists \mu_0 > 0 \text{ such that } \mu(a) \geq \mu_0 \text{ a.e. } a \geq 0. \quad (\text{H1})$$

A consequence of (H1) is that $\int_0^\infty \mu(a) da = \infty$, implying that

$$a \mapsto e^{-\int_0^a \mu(l) dl}$$

is a probability function, this latter describing the survival until age a .

Note that, linked to Problem (2.1), the total population at time t is given by

$$y(t) + \int_0^\infty x(t, a) da$$

and the total ingested preys by the predators by

$$\alpha \int_0^\infty \gamma(a)x(t, a) da.$$

2.2 Well posedness and positivity

2.2.1 Notations

In all that follows, consider the Banach space

$$\mathcal{X} = L^1(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}$$

with the product norm and his nonnegative cone defined by $\mathcal{X}_+ = L^1_+(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+$. We consider the following differential operator

$$\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X},$$

where

$$D(\mathcal{A}) = \{(\phi, z) \in \mathcal{X}, \phi \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+) \text{ and } \phi(0) = \int_0^\infty \beta(a)\phi(a)da\},$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{D} & 0 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}\phi = -\frac{d\phi}{da} - \mu\phi$$

and the function $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ given by

$$f(\phi, z) = \begin{pmatrix} -z\gamma(\cdot)\phi(\cdot) \\ \alpha z \int_0^\infty \gamma(a)\phi(a)da \end{pmatrix},$$

so that Problem (2.1) rewrites as the following abstract Cauchy Problem :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + f(x(t), y(t)), \\ (x(0), y(0)) = (x_0(\cdot), y_0) \in \mathcal{X}. \end{cases} \quad (2.2)$$

2.2.2 Linear part

To perform an analysis of Problem (2.2), we start by a study of the differential operator $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$. The same arguments that developed in [11] prove that $D(\mathcal{A})$ is a dense subset of \mathcal{X} . Furthermore, as proved in [153] and [117] for such an operator, there exists real values λ_0 and ω_0 satisfying

$$\min(\lambda_0, \omega_0) \geq \|\beta\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} - \mu_0$$

such that $\mathcal{A} - \lambda_0 I$ is dissipative and $(\lambda I - \mathcal{A})$ is surjective for every $\lambda \geq \omega_0$. The classical Lumer-Phillips theorem implies that \mathcal{A} is the infinitesimal generator of a positive C_0 -semigroup $\{T_{\mathcal{A}}(t)\}_{t \geq 0}$ that is quasicontractive : $\|T_{\mathcal{A}}(t)\|_{\mathcal{X}} \leq e^{\omega t}$ for all $t \geq 0$ and $\omega \geq \|\beta\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} - \mu_0$. The details of the proof can be found in Appendix B.

2.2.3 Local existence, uniqueness and positivity

Since the nonlinear part f of Problem (2.2) is quadratic, it is clearly a locally Lipschitz continuous function on \mathcal{X} . A consequence of Theorem A.5.2 is that for every $(x_0, y_0) \in \mathcal{X}$, there exists $t_{\max} \leq +\infty$ such that Problem (2.2) has a unique mild solution $u \in \mathcal{C}([0, t_{\max}(x_0, y_0)), \mathcal{X})$ where $t_{\max}(x_0, y_0) \leq \infty$. Furthermore, this solution is defined in a classical sense whenever $(x_0, y_0) \in D(\mathcal{A})$.

We now prove that for any initial condition $(x_0, y_0) \in \mathcal{X}_+$, the corresponding solution remains nonnegative on $[0, t_{\max})$. To achieve that goal, we need the two following lemmas. Their proof can respectively be found in [119, Lemma 1] and [120, Lemma 2.1]. Let us define

$$B_m = \{(\phi, z) \in \mathcal{X} : \|(\phi, z)\|_{\mathcal{X}} \leq m\}, \quad m > 0.$$

Lemma 2.2.1. *There exists $K > 0$ such that for every $((\phi_1, z_1), (\phi_2, z_2)) \in B_m^2$, and $m > 0$ we have*

$$\|f(\phi_1, z_1) - f(\phi_2, z_2)\|_{\mathcal{X}} \leq m K \|(\phi_1, z_1) - (\phi_2, z_2)\|_{\mathcal{X}}.$$

Lemma 2.2.2. *For every $m > 0$, there exists $\lambda_m \in \mathbb{R}$ such that*

$$(\phi, z) \in B_m \cap \mathcal{X}_+ \Rightarrow f(\phi, z) + \lambda_m(\phi, z) \in \mathcal{X}_+.$$

In fact, it is sufficient to take $\lambda_m > m \|\gamma\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}$.

Proposition 2.2.3. *For every $(x_0, y_0) \in \mathcal{X}_+$, there exists $t_{\max}(x_0, y_0) \leq \infty$ such that Problem (2.2) has a unique mild solution $u \in \mathcal{C}([0, t_{\max}(x_0, y_0)), \mathcal{X}_+)$.*

Proof. Let $m > 0$ and $\lambda_m \geq m \|\gamma\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}$. Let us define the linear operator

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{A} - \lambda_m I$$

and the function

$$f_m = f + \lambda_m I.$$

Then \mathcal{A}_m is the infinitesimal generator of a positive C_0 -semigroup $\{T_{\mathcal{A}_m}(t)\}_{t \geq 0}$ on \mathcal{X}_+ that satisfies $\|T_{\mathcal{A}_m}(t)\|_{\mathcal{X}} \leq e^{(\omega - \lambda_m)t}$ for every $t \geq 0$. We then let

$$r_m = 2 \| (x_0, y_0) \|_{\mathcal{X}} \sup_{s \in [0, 1]} \|T_{\mathcal{A}_m}(s)\| > 0,$$

then suppose m large enough to have $r_m \leq m$ and we denote by $\mathcal{X}_+^{r_m} = \mathcal{X}_+ \cap B_{r_m} \subset B_m$. We consider $\tau > 0$ such that

$$\tau < \min \left(1, \frac{1}{2(Kr_m + \lambda_m) \times \sup_{s \in [0, 1]} \|T_{\mathcal{A}_m}(s)\|_{\mathcal{X}}} \right),$$

and a consequence of Lemmas 2.2.1 and 2.2.2 is that the linear operator

$$G : \mathcal{C}([0, \tau], \mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{C}([0, \tau], \mathcal{X})$$

defined by

$$G(x(t, \cdot), y(t)) = T_{\mathcal{A}_m}(t) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \int_0^t T_{\mathcal{A}_m}(t-s) f_m \begin{pmatrix} x(s, \cdot) \\ y(s) \end{pmatrix} ds$$

is a 1/2-shrinking operator on $\mathcal{C}([0, \tau], \mathcal{X}_+^{r_m})$ that preserves this latter space. The Banach-Picard theorem and some classical time extending properties of the solution then yield the proposition. \square

2.2.4 Global existence

Theorem 2.2.4. *For all $(x_0, y_0) \in \mathcal{X}_+$, Problem (2.2) has a unique mild solution $(x, y) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{X}_+)$.*

Proof. Consider $(x, y) \in \mathcal{C}([0, t_{\max}), \mathcal{X}_+)$ the solution of (2.2) and suppose by contradiction that $t_{\max} < \infty$. Let us first prove that for every $t \geq 0$, $\|x(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} < \infty$.

A direct consequence of the positivity is that

$$\partial_t x(t, a) + \partial_a x(t, a) \leq -\mu(a)x(t, a).$$

It is classical, using the characteristics of the PDE equation, that an implicit formulation of the solution of

$$\partial_t x(t, a) + \partial_a x(t, a) = -\mu(a)x(t, a)$$

that satisfies the loopback boundary condition in (2.1) is given by :

$$x(t, a) = \begin{cases} x_0(a-t)e^{-\int_{a-t}^a \mu(s)ds} & \text{if } a \geq t, \\ \psi(t-a)e^{-\int_0^a \mu(s)ds} & \text{if } a < t, \end{cases} \quad (2.3)$$

where $\psi(t) = x(t, 0)$ satisfies :

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \int_0^t \beta(u)\psi(t-u)e^{-\int_0^u \mu(s)ds} du + \int_t^\infty \beta(u)x_0(u-t)e^{-\int_{u-t}^u \mu(s)ds} du \\ &= \int_0^t \psi(u)\beta(t-u)e^{-\int_0^{t-u} \mu(s)ds} du + \int_0^\infty \beta(u+t)x_0(u)e^{-\int_u^{u+t} \mu(s)ds} du. \end{aligned} \quad (2.4)$$

From equation (2.4) we define two operators

$$S_1 : L^1(0, t) \rightarrow L^1(0, t), \quad S_2 : L^1(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^1(0, t)$$

for every $\psi \in L^1(0, t)$, $\phi \in L^1(\mathbb{R}_+)$ and $\xi \in [0, t]$ by

$$\begin{aligned} S_1\psi(\xi) &= \int_0^\xi \psi(y)\beta(\xi-y)e^{-\int_0^{\xi-y} \mu(s)ds} dy, \\ S_2\phi(\xi) &= \int_0^\infty \phi(y)\beta(y+\xi)e^{-\int_y^{\xi+y} \mu(s)ds} dy, \end{aligned}$$

so we formally get the following representation :

$$x(t, a) = \begin{cases} x_0(a-t)e^{-\int_{a-t}^a \mu(s)ds} & \text{if } a \geq t, \\ (I - S_1)^{-1}S_2x_0(t-a)e^{-\int_0^a \mu(s)ds} & \text{if } a < t. \end{cases}$$

This latter equality is well defined. Indeed, as proved in [6], S_1 is a Volterra operator, then for all $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ and $\psi \in L^1(0, t)$ fixed, we have a unique function $\varphi \in L^1(0, t)$ such that

$$(\lambda I - S_1)\varphi = \psi.$$

Thus $(I - S_1)^{-1}$ is well defined from $L^1(0, t)$ to $L^1(0, t)$. Since $x_0 \in L^1(\mathbb{R}_+)$ then

$$(I - S_1)^{-1}S_2x_0 \in L^1(0, t).$$

Consequently for all $t \geq 0$ we have

$$\|x(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \leq \int_t^\infty x_0(a-t)da + \int_0^t (I - S_1)^{-1}S_2x_0(t-a)da < \infty.$$

Moreover, straightforward upper bounds imply that

$$y'(t) \leq \alpha M y(t) \|\gamma\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}$$

for every $t \geq 0$, where $M = \max_{s \in [0, t_{\max}]} \|x(s, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} < \infty$. Thus, if $t_{\max} < \infty$, an integration of the differential inequality would lead to

$$y(t) \leq y_0 e^{\alpha M t_{\max} \|\gamma\|_{L^\infty}} < \infty,$$

implying a contradiction with the fact that we have either

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}} \|x(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} = \infty$$

or

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}} |y(t)| = \infty.$$

Finally $t_{\max} = \infty$ and the solution is global in time. \square

We finally get existence and uniqueness of a global nonnegative solution. The goal is now to analyze the asymptotic behavior of the solutions.

2.3 Stability, persistence and boundedness

Suppose that we have a positive initial condition $(x_0, y_0) \in \mathcal{X}_+^*$, where

$$\mathcal{X}_+^* = \{(x_0, y_0) \in \mathcal{X}_+ : \int_0^\infty x_0(a) da > 0 \text{ and } y_0 > 0\}.$$

Let us define

$$a_1 = \sup\{a \geq 0 : |\text{supp}(\gamma) \cap (0, a)| = 0\} < \infty. \quad (2.5)$$

Remark 2.3.1. This definition implies that there exists $\gamma_- > 0$ and $a_2 > a_1$ such that $\int_{a_1}^{a_2} \gamma(a) da \geq \gamma_-$. The case $a_1 > 0$ translates the fact that the youngest preys are not considered as a resource availability for the predators.

In all that follows, let us consider the following thresholds :

$$R_0 = \int_0^\infty \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(s) ds} da, \quad (2.6)$$

$$R_- = \int_0^{a_1} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(s) ds} da. \quad (2.7)$$

Note that, similarly to the basic reproductive number in the epidemiological case (see Section 1.4.2 for more details), the R_0 value represents the average number of offspring that is produced over the lifetime by one prey and in a context with no predation. This threshold will give a characterization of extinction of the total population.

In the same idea, the R_- value represents the offspring produced by one prey from his birth, until it begins to be hunted by the predator. We will get an unboundedness result from this threshold.

2.3.1 Equilibria

We first look for steady points of problem (2.1). The point $(x^*, y^*) \in \mathcal{X}$ is an equilibrium if it is a solution of the system

$$\begin{cases} (x^*)'(a) &= -\mu(a)x^*(a) - y^*\gamma(a)x^*(a), \\ 0 &= \alpha y^* \int_0^\infty \gamma(a)x^*(a)da - \delta y^*, \\ x^*(0) &= \int_0^\infty x^*(a)\beta(a)da. \end{cases}$$

An integration then gives

$$\begin{cases} x^*(a) = x^*(0)e^{-\int_0^a \mu(s)ds - y^* \int_0^a \gamma(s)ds}, \\ x^*(0) \left[1 - \int_0^\infty \beta(a)e^{-\int_0^a \mu(s)ds - y^* \int_0^a \gamma(s)ds} da \right] = 0, \\ y^* [\alpha \int_0^\infty \gamma(a)x^*(a)da - \delta] = 0. \end{cases}$$

Note that $R_- \leq R_0$ and we get the following proposition.

Proposition 2.3.2.

1. If $R_0 < 1$ or if ($R_0 > 1$ and $R_- \geq 1$) then there is a unique equilibrium that is $E_0 = (0, 0)$;
2. If $R_0 = 1$ and $R_- < 1$ then for all $\xi \in [0, \infty)$, $E_{1,\xi} = (x_{1,\xi}^*, 0)$ is an equilibrium, where $x_{1,\xi}$ is defined by $x_{1,\xi}^*(a) = \xi e^{-\int_0^a \mu(s)ds}$. In particular $E_{1,0} = E_0$;
3. If $R_0 = 1$ and $R_- = 1$ then $\forall \xi \geq 0$, $E_{1,\xi}$ is an equilibrium and $E_{2,\xi} = (x_{2,\xi}^*, \xi)$ also, where

$$\begin{aligned} x_{2,\xi}^*(a) &= x_{2,\xi}^*(0)e^{-\int_0^a \mu(s)ds - \xi \int_0^a \gamma(s)ds}, \\ x_{2,\xi}^*(0) &= \frac{\delta}{\alpha} \left[\int_0^\infty \gamma(a)e^{-\int_0^a \mu(s)ds - \xi \int_0^a \gamma(s)ds} da \right]^{-1}; \end{aligned}$$

4. If $R_0 > 1$ and $R_- < 1$ then besides the trivial equilibrium E_0 , there is a positive equilibrium $E_2 = (x_2^*, y^*) = (x_{2,y^*}^*, y^*)$ with y^* that satisfies

$$\int_0^\infty \beta(a)e^{-\int_0^a \mu(s)ds - y^* \int_0^a \gamma(s)ds} da = 1. \quad (2.8)$$

2.3.2 Stability

To perform the stability analysis, we exhibit some spectral properties of the differential operator \mathcal{A} and of the semigroup $\{T_{\mathcal{A}}(t)\}_{t \geq 0}$. For more details about spectral theory and stability results we can look at Sections A.2 and 1.4.1. In the context of Problem (2.1), the following result holds.

Theorem 2.3.3. *We have $\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A} + D_E f) \leq -\mu_0 < 0$.*

To prove Theorem 2.3.3, we start by a lemma dealing with some compactness properties about the differential of f . One can note that for every $E = (x^*, y^*) \in \mathcal{X}$, the differential of f at an equilibrium E can be written as

$$D_E f = (D_E f)_1 + (D_E f)_2 = \begin{pmatrix} -y^* \gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\gamma x^* \\ \alpha y^* L_\gamma(\cdot) & \alpha \int_0^\infty \gamma(a) x^*(a) da \end{pmatrix},$$

where L_γ is the operator defined for some integrable function h on \mathbb{R}_+ by :

$$L_\gamma : h \mapsto \int_0^\infty \gamma(a) h(a) da. \quad (2.9)$$

Here is the compactness result :

Lemma 2.3.4. *The function f is in $C^1(\mathcal{X})$ and the operator $(D_E f)_2$ is compact.*

Proof. Since function $D_E f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ is Lipschitz continuous, it is a bounded operator on the Banach space \mathcal{X} and so $D_E f$ is continuous and f is in $C^1(\mathcal{X})$. We now prove that $(D_E f)_2$ is compact.

Denoting $(D_E f)_2 = (G_1, G_2)^\top$ where $G_1 : \mathcal{X} \rightarrow L^1(\mathbb{R}_+)$ and $G_2 : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, we can easily check that G_2 has a finite dimensional range and is consequently compact. To prove the compactness of G_1 we use the classical Riesz-Fréchet-Kolmogorov (RFK) criterion in L^1 (see Theorem A.3.1). Let $h \in \mathbb{R}_+$ and $S \subset \mathcal{X}$ be a bounded subset of \mathcal{X} . Then there exists $M \in \mathbb{R}_+$ such that $\|(\phi, z)\|_{\mathcal{X}} \leq M$ for every $(\phi, z) \in S$. Denoting by

$$\tau_h(\phi) = \phi(\cdot + h)$$

the translation operator in L^1 we then have

$$\begin{aligned} \|\tau_h G_1(\phi, z) - G_1(\phi, z)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} &\leq |z| \int_0^\infty |\gamma(a) x^*(a) - \gamma(a+h) x^*(a+h)| da \\ &\leq M \|\tau_h(\gamma x^*) - (\gamma x^*)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}. \end{aligned}$$

Since $\gamma \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ and $x^* \in L^1(\mathbb{R}_+)$ then $\gamma x^* \in L^1(\mathbb{R}_+)$ and consequently we have

$$\|\tau_h(\gamma x^*) - (\gamma x^*)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

It implies

$$\sup_{(\phi, z) \in S} \|\tau_h G_1(\phi, z) - G_1(\phi, z)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad (2.10)$$

Furthermore we can similarly prove, using the Lebesgue theorem, that

$$\sup_{(\phi, z) \in S} \int_r^\infty |G_1(\phi(a), z)| da \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0. \quad (2.11)$$

The consequence of (2.10)-(2.11) and the RFK criterion is the relative compactness of $G_1(S)$ in $L^1(\mathbb{R}_+)$. Finally, G_1 is compact and so is $(D_E f)_2$. \square

We can now prove Theorem 2.3.3 :

Proof. (Theorem 2.3.3)

The fact that $(D_E f)_2$ is a compact operator and the use of Theorem A.2.9 implies that for every equilibrium E ,

$$\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A} + D_E f) = \omega_{\text{ess}}(\mathcal{A} + (D_E f)_1),$$

so we need to prove

$$\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A} + (D_E f)_1) \leq -\mu_0.$$

Similarly to the proof of Theorem 2.2.4, we can calculate the expression of the semigroup generated by $\mathcal{A} + (D_E f)_1$:

$$\begin{aligned} & T_{\mathcal{A}+(D_E f)_1}(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_0(a-t)e^{-\int_{a-t}^a (\mu(s)+y^*\gamma(s))ds} \mathbf{1}_{\{a \geq t\}} + \psi(t-a)e^{-\int_0^a (\mu(s)+y^*\gamma(s))ds} \mathbf{1}_{\{a < t\}} \\ y_0 e^{-\delta t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

where $\psi(t) = x(t, 0)$. We decompose the operator $T_{\mathcal{A}+(D_E f)_1}$ in :

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{A}+(D_E f)_1}(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} (a) &= T_1(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} (a) + T_2(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} (a) + T_3(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} (a), \text{ with :} \\ T_1(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} (a) &= \begin{cases} (x_0(a-t)e^{-\int_{a-t}^a (\mu(s)+y^*\gamma(s))ds}, 0) & \text{if } a \geq t, \\ (0, 0) & \text{if } a < t. \end{cases} \\ T_2(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} (a) &= \begin{cases} (0, 0) & \text{if } a \geq t, \\ (\psi(t-a)e^{-\int_0^a (\mu(s)+y^*\gamma(s))ds}, 0) & \text{if } a < t. \end{cases} \\ T_3(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} (a) &= (0, y_0 e^{-\delta t}), \forall t \geq 0, a \geq 0. \end{aligned}$$

The operator T_3 is compact because its range is a finite dimensional space.

For the operator T_1 , we get the upper bound

$$\left\| T_1(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{X}} \leq \int_t^\infty x_0(a-t)e^{-\int_{a-t}^a \mu(s)ds} da \leq e^{-\mu_0 t} \int_0^\infty x_0(u)du$$

and consequently we get

$$\|T_1(t)\|_{\mathcal{X}} \leq e^{-\mu_0 t}. \quad (2.12)$$

Let us define the operators

$$\hat{S}_1 : L^1(0, t) \rightarrow L^1(0, t), \quad \hat{S}_2 : L^1(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^1(0, t)$$

by

$$\begin{aligned} \hat{S}_1 \psi(\xi) &= \int_0^\xi \psi(y) \beta(\xi - y) e^{-\int_0^{\xi-y} [\mu(s)+y^*\gamma(s)]ds} dy, \\ \hat{S}_2 \phi(\xi) &= \int_0^\infty \phi(y) \beta(y + \xi) e^{-\int_y^{\xi+y} [\mu(s)+y^*\gamma(s)]ds} dy. \end{aligned}$$

Thus we get the following expression for the operator T_2 :

$$T_2(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} (a) = \begin{cases} (0, 0) & \text{if } a \geq t, \\ \left(((I - \hat{S}_1)^{-1} \hat{S}_2 x_0(t-a)) e^{-\int_0^a (\mu(s)+y^*\gamma(s))ds}, 0 \right) & \text{if } a < t. \end{cases}$$

We can show that \hat{S}_1 is bounded, so as $I - \hat{S}_1$. Since $(I - \hat{S}_1)^{-1}$ is well defined and $(I - \hat{S}_1)$ is bijective from $L^1(0, t)$ in itself, which is a Banach space, then $(I - \hat{S}_1)^{-1}$ is bounded. Let us define the operator

$$\overline{S}_2 : L^1(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^1(0, t)$$

by

$$\overline{S}_2\phi(\xi) = \int_0^\infty \phi(y) c e^{-\int_y^{\xi+y} [\mu(s) + y^* \gamma(s)] ds} dy,$$

where c is a positive constant. Using the RFK criterion (see Lemma 2.3.4), we can prove that \overline{S}_2 is compact for every $c > 0$. Indeed, setting $h > 0$ and taking B a bounded subset of $L^1(\mathbb{R}_+)$ we get, for $\phi \in B$:

$$\begin{aligned} & \|\tau_h(\overline{S}_2\phi) - \overline{S}_2\phi\|_{L^1(0,t)} \\ & \leq c \int_0^t \int_0^\infty \phi(y) \left(e^{-\int_y^{\xi+y} [\mu(s) + y^* \gamma(s)] ds} - e^{-\int_y^{\xi+y+h} [\mu(s) + y^* \gamma(s)] ds} \right) dy d\xi \\ & \leq c \int_0^t \int_0^\infty \phi(y) e^{-\int_y^{\xi+y} [\mu(s) + y^* \gamma(s)] ds} \left(1 - e^{-\int_{\xi+y}^{\xi+y+h} [\mu(s) + y^* \gamma(s)] ds} \right) dy d\xi \\ & \leq c \int_0^t \int_0^\infty \phi(y) \left(1 - e^{-h\|\mu\|_{L^\infty}} \right) dy d\xi \\ & \leq ct \left(1 - e^{-h\|\mu\|_{L^\infty}} \right) \int_0^\infty \phi(y) dy, \end{aligned}$$

which converges to 0 uniformly on B when h tends to 0 since B is bounded. Therefore \overline{S}_2 is compact. Since for $c = \|\beta\|_{L^\infty}$ we have

$$\hat{S}_2\phi(x) \leq \overline{S}_2\phi(x)$$

for all $\phi \in L^1(\mathbb{R}_+)$ and $x \in [0, t]$, then \hat{S}_2 is also compact and so is the operator T_2 . Finally since $T_2(t)$ and $T_3(t)$ are compact for every $t \geq 0$ then

$$\begin{aligned} \|T_{\mathcal{A}+(DEf)_1}(t)\|_{\text{ess}} &= \|T_1(t) + T_2(t) + T_3(t)\|_{\text{ess}} \\ &= \|T_1(t)\|_{\text{ess}} \\ &\leq \|T_1(t)\|_{\mathcal{X}}, \end{aligned}$$

and consequently to (2.12),

$$\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A} + (DEf)_1) \leq -\mu_0.$$

□

Equilibrium E_0

The differential of f at the point E_0 is the null matrix. So the linearized system to study is

$$u'(t) = \mathcal{A}u(t).$$

Using Theorem A.2.8 and since $\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A}) < 0$, we just need to study eigenvalues of \mathcal{A} . We thus try to solve the system

$$\begin{cases} \partial_t x(t, a) &= -\partial_a x(t, a) - \mu(a)x(t, a), \\ y'(t) &= -\delta y(t), \\ x(t, 0) &= \int_0^\infty x(t, a)\beta(a)da. \end{cases} \quad (2.13)$$

We are looking for solutions of the form

$$x(t, a) = \bar{x}(a)e^{\lambda t}, \quad y(t) = \bar{y}e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

So, after replacing the latter expressions in the first equation of the system (2.13) then resolving the system, we get

$$\begin{cases} \bar{x}(a) &= \bar{x}(0)e^{-\int_0^a [\lambda + \mu(s)] ds}, \\ \lambda \bar{y} &= -\delta \bar{y}, \\ \bar{x}(0) &= \int_0^\infty \bar{x}(a)\beta(a) da. \end{cases}$$

The second equation only admits $-\delta$ as eigenvalue, which is real and negative. Then, using the third equation, we obtain the following characteristic equation

$$\int_0^\infty \beta(a)e^{-\int_0^a [\lambda + \mu(s)] ds} da = 1.$$

We thus can show the following theorem, where R_0 is defined in (2.6) :

Theorem 2.3.5.

1. If $R_0 < 1$ then E_0 is globally asymptotically stable in \mathcal{X}_+ .
2. If $R_0 > 1$ then E_0 is unstable.

Proof. 1. Suppose that $R_0 < 1$. The real part of the characteristic equation gives :

$$\int_0^\infty \beta(a)e^{-\operatorname{Re}(\lambda)a} \cos(-\operatorname{Im}(\lambda)a)e^{-\int_0^a \mu(s) ds} da = 1.$$

Then, if $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$ we get $R_0 \geq 1$ that is absurd, so $\omega_0(\mathcal{A}) < 0$ and E_0 is locally exponentially asymptotically stable from Theorem 1.4.3. Now we prove the global stability. Let $(x_0, y_0) \in \mathcal{X}_+$ be the initial condition, then the solution of (2.1) at time t is given by the Duhamel formula

$$\begin{pmatrix} x(t, \cdot) \\ y(t) \end{pmatrix} = T_{\mathcal{A}}(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \int_0^t T_{\mathcal{A}}(t-s) f \begin{pmatrix} x(s, \cdot) \\ y(s) \end{pmatrix} ds.$$

Since $\omega_0(\mathcal{A}) < 0$ then

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| T_{\mathcal{A}}(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{X}} = 0$$

and consequently

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, \cdot)\|_{L^1} = 0$$

since the first component of f is non positive. Finally, with the second equation of (2.1), we get

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

and the global stability of E_0 follows.

2. Suppose that $R_0 > 1$ and define the function

$$g : \lambda \mapsto \int_0^\infty \beta(a) e^{-\lambda a} e^{-\int_0^a \mu(s) ds} da.$$

We see that g is strictly decreasing with $g(0) = R_0 > 1$. There consequently exists $\bar{\lambda} > 0$ such that $g(\bar{\lambda}) = 1$, so

$$\omega_0(\mathcal{A}) > 0.$$

Since $\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A}) \leq 0$ an application of Theorem 1.4.3 implies that E_0 is unstable. \square

Remark 2.3.6. We can see that in the case $R_0 < 1$, the total population is bounded.

Equilibria $E_{1,\xi}$

Let $\xi > 0$ and consider the equilibrium $E_{1,\xi}$. Then the differential of f at the point $E_{1,\xi}$ is given by

$$D_{E_{1,\xi}} f = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma x_{1,\xi}^* \\ 0 & \alpha \int_0^\infty \gamma(a) x_{1,\xi}^*(a) da \end{pmatrix}.$$

The linearized system at $E_{1,\xi}$ is thus

$$\frac{du}{dt}(t) = (\mathcal{A} + D_{E_{1,\xi}} f)u(t).$$

Once again we just need to study eigenvalues of the operator $\mathcal{A} + D_{E_{1,\xi}} f$, so we study the system

$$\begin{cases} \bar{x}(a) &= \bar{x}(0) e^{-\int_0^a [\lambda + \mu(s)] ds} - \gamma(a) x_{1,\xi}^*(a) \bar{y}, \\ \lambda \bar{y} &= -\delta \bar{y} + \alpha \bar{y} \int_0^\infty \gamma(a) x_{1,\xi}^*(a) da, \\ \bar{x}(0) &= \int_0^\infty \bar{x}(a) \beta(a) da. \end{cases} \quad (2.14)$$

Let us denote

$$S = \frac{\delta}{\alpha} \left[\int_0^\infty \gamma(a) e^{-\int_0^a \mu(s) ds} da \right]^{-1},$$

then we get the following instability theorem.

Theorem 2.3.7.

1. If $\xi > S$ then the equilibrium $E_{1,\xi}$ is unstable.
2. If $\xi > 0$ then for every $\epsilon > 0$ there exists $\bar{\xi}(\epsilon)$ such that $E_{1,\bar{\xi}} \in B(E_{1,\xi}, \epsilon)$.

Proof.

1. Let $\xi > S$. The second equation of (2.14) and the definition of $x_{1,\xi}^*$ given in Proposition 2.3.2 imply

$$\lambda \bar{y} = \left(-\delta + \alpha \int_0^\infty \gamma(a) \xi e^{-\int_0^a \mu(s) ds} da \right) \bar{y}.$$

Defining

$$\bar{\lambda} = -\delta + \alpha \int_0^\infty \gamma(a) \xi e^{-\int_0^a \mu(s) ds} da,$$

we get $\bar{\lambda} > 0$ since $\xi > S$.

The first and third equations of (2.14) give us

$$\left(1 - \int_0^\infty \beta(a)e^{-\int_0^a(\mu(s)+\bar{\lambda})ds} da\right) \bar{x}(0) + \xi \bar{y} \int_0^\infty \beta(a)\gamma(a)e^{-\int_0^a \mu(s)ds} da = 0.$$

Since $\bar{\lambda} > 0$, we get

$$\int_0^\infty \beta(a)e^{-\int_0^a(\mu(s)+\bar{\lambda})ds} da < R_0.$$

We know by definition of $E_{1,\xi}$ that $R_0 = 1$. Consequently

$$\left(1 - \int_0^\infty \beta(a)e^{-\int_0^a(\mu(s)+\bar{\lambda})ds} da\right) > 0.$$

Let $\bar{y} = 1$ and

$$\bar{x}(0) = \frac{-\xi \int_0^\infty \beta(a)\gamma(a)e^{-\int_0^a \mu(s)ds} da}{1 - \int_0^\infty \beta(a)e^{-\int_0^a(\mu(s)+\bar{\lambda})ds} da}.$$

Then, defining

$$\bar{x}(a) = \bar{x}(0)e^{-\int_0^a[\bar{\lambda}+\mu(s)]ds} - \gamma(a)x_{1,\xi}^*(a),$$

we finally find $(\bar{x}, \bar{y}) \neq (0, 0)$ that verifies the system (2.14), so we find a positive eigenvalue and the equilibrium $E_{1,\xi}$ is unstable by using Theorem 1.4.3.

2. Let $\xi > 0$, $\epsilon > 0$ and define

$$\bar{\xi} = \xi + \epsilon\mu_0.$$

We then get $E_{1,\bar{\xi}} \in B(E_{1,\xi}, \epsilon)$ since

$$\|E_{1,\bar{\xi}} - E_{1,\xi}\|_{\mathcal{X}} = \|x_{1,\bar{\xi}}^* - x_{1,\xi}^*\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} = |\bar{\xi} - \xi| \int_0^\infty e^{-\int_0^a \mu(s)ds} da \leq \epsilon\mu_0 \int_0^\infty e^{-\mu_0 a} da \leq \epsilon.$$

□

The latter assertion prevents all equilibria $E_{1,\xi}, \xi \geq 0$ to be locally asymptotically stable.

Equilibrium E_2

We now focus on the equilibrium $E_2 = (x_2^*, y^*)$ that exists if and only if $R_0 > 1$ and $R_- < 1$. Then the differential of f at the point E_2 is given by :

$$D_{E_2}f = \begin{pmatrix} -y^*\gamma & -\gamma x_2^* \\ \alpha y^* L_\gamma(\cdot) & \delta \end{pmatrix}$$

where L_γ is defined in (2.9). Since the linearized system is

$$u'(t) = (\mathcal{A} + D_{E_2}f)u(t)$$

we thus have to study the system

$$\begin{cases} \bar{x}'(a) &= -[\lambda + \mu(a) + y^*\gamma(a)] \bar{x}(a) - \gamma(a)x_2^*(a)\bar{y}, \\ \lambda \bar{y} &= \alpha y^* \int_0^\infty \gamma(a)\bar{x}(a)da, \\ \bar{x}(0) &= \int_0^\infty \bar{x}(a)\beta(a)da. \end{cases}$$

We finally have to solve the system $BX = C$, where :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ and } X = \begin{pmatrix} \bar{x}(0) \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \text{ with :}$$

$$\begin{cases} b_1 &= 1 - \int_0^\infty \beta(a) e^{-\int_0^a (\mu(s) + \lambda + y^* \gamma(s)) ds} da, \\ b_2 &= \frac{\delta}{\alpha \Gamma} \int_0^\infty \beta(a) e^{-\int_0^a [\mu(s) + y^* \gamma(s)] ds} \int_0^a \gamma(u) e^{-\lambda(a-u)} du da, \\ b_3 &= \alpha y^* \int_0^\infty \gamma(a) e^{-\int_0^a (\mu(s) + \lambda + \gamma(s) y^*) ds} da, \\ b_4 &= -\lambda - \frac{\delta y^*}{\Gamma} \int_0^\infty \gamma(a) e^{-\int_0^a [\mu(s) + \gamma(s) y^*] ds} \int_0^a \gamma(u) e^{-\lambda(a-u)} du da, \end{cases}$$

and

$$\Gamma = \int_0^\infty \gamma(a) e^{-\int_0^a [\mu(s) + y^* \gamma(s)] ds} da.$$

In the specific case where γ is constant, we can compute the eigenvalues.

Theorem 2.3.8. *If $\gamma(a) = \gamma_0$, $\forall a \geq 0$ then $\lambda = \pm i \sqrt{y^* \gamma_0 \delta}$.*

Proof. By solving $BX = C$, we need to have $\det(B) = 0$ to get a non zero solution X . It is then equivalent to have

$$b_1 b_4 = b_2 b_3.$$

Since

$$b_2 = \frac{\delta \gamma_0}{\alpha \Gamma \lambda} \left(\int_0^\infty \beta(a) e^{-\int_0^a (\mu(s) + y^* \gamma(s)) ds} da - \int_0^\infty \beta(a) e^{-\int_0^a (\mu(s) + \lambda + y^* \gamma(s)) ds} da \right),$$

then, with (2.8), we get

$$b_2 = \frac{\delta \gamma_0}{\alpha \Gamma \lambda} \left(1 - \int_0^\infty \beta(a) e^{-\int_0^a (\mu(s) + \lambda + y^* \gamma(s)) ds} da \right) = \frac{\delta \gamma_0 b_1}{\alpha \Gamma \lambda}.$$

This implies that

$$b_1 b_4 = b_2 b_3 \Leftrightarrow b_4 = \frac{\delta \gamma_0 b_3}{\alpha \Gamma \lambda}$$

which is equivalent to

$$\begin{aligned} & -\lambda - \frac{\delta y^* \gamma_0^2}{\lambda \Gamma} \left(\int_0^\infty e^{-\int_0^a (\mu(s) + \gamma_0 y^*) ds} da - \int_0^\infty e^{-\int_0^a (\mu(s) + \gamma_0 y^* + \lambda) ds} da \right) \\ &= \frac{\delta y^* \gamma_0^2}{\lambda \Gamma} \int_0^\infty e^{-\int_0^a (\mu(s) + \gamma_0 y^* + \lambda) ds} da. \end{aligned}$$

With the expression of Γ , we finally get

$$-\lambda = \frac{\delta y^* \gamma_0}{\lambda}$$

and the proof is completed. \square

Note that similarly to the ODE Lotka Volterra system, we get the existence of imaginary eigenvalues. In the case where γ is not constant, the analysis is much more complicated to perform. However, we will perform some simulations in the next section to exhibit the different possible behaviors.

2.3.3 Persistence

In this subsection we express some standard notions from mathematical ecology by formulating, in the context of Problem (2.1), the definition of persistence. First, let us give a proposition, whose arguments of the proof can be found in [120].

Proposition 2.3.9. *Problem (2.1) induces a continuous semiflow via*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{X}_+ &\rightarrow \mathcal{X}_+ \\ (t, z_0) &\mapsto \Phi_t(z_0) = (x(t), y(t)), \end{aligned}$$

where $(x(t), y(t))$ is the unique solution that satisfies $(x(0), y(0)) = z_0$.

Let us suppose that

$$\exists \eta_1 > 0, \exists 0 < \underline{a} < \bar{a} < \infty \text{ such that } \beta(a) \geq \eta_1 \text{ for almost every (f.a.e) } a \in (\underline{a}, \bar{a}) \quad (\text{H2})$$

and consider the property

$$\exists \eta_2 > 0, \exists 0 \leq t_1 < t_2 < \underline{a} : \int_{t_1}^{t_2} x_0(a) da \geq \eta_2. \quad (\text{P})$$

Without lost of generality, we assume that $|t_2 - t_1| < |\bar{a} - \underline{a}|$ even if we reduce η_2 .

Remark 2.3.10.

1. Assumption (H2) means that preys of a certain range of age have a high ability to reproduce.
2. Assumption (P) together with property (H2) means that there is initially a high enough quantity of young preys that will be able to reproduce later.

Let us consider in all that follows the set

$$\mathcal{X}_P = \{(x_0, y_0) \in \mathcal{X}_+^* \text{ that satisfies (P)}\}.$$

Here is the definition of persistence for our system (see also Section 1.4.3).

Definition 2.3.11. Considering the mapping $\rho_1 : (x, y) \in \mathcal{X} \mapsto \|x\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}$, we say that

1. the prey population is **uniformly strongly persistent** if

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall (x_0, y_0) \in \mathcal{X}_P, \quad \rho_1(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow \sigma_{\rho_1}^-(x_0, y_0) \geq \varepsilon;$$

2. the prey population is **uniformly weakly persistent** when considering $\sigma_{\rho_1}^+(x)$ instead of $\sigma_{\rho_1}^-(x)$.

This definition can be naturally extended to the case of persistence of the predator population, by considering the map $\rho_2 : (x, y) \in \mathcal{X} \mapsto y$ instead of ρ_1 . We thus can prove the following theorem, where R_- is defined by (2.7).

Theorem 2.3.12. *Suppose that the initial condition $(x_0, y_0) \in \mathcal{X}_P$. If $R_- > 1$ then prey population and predator population explode :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty x(t, a) da = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty.$$

Proof. We know that :

$$\partial_t x(t, a) + \partial_a x(t, a) = -(\mu(a) + y(t)\gamma(a))x(t, a), \forall t \geq 0, \forall a \geq 0.$$

This latter equation leads to :

$$x(t, a) \geq \begin{cases} x_0(a-t)e^{-\int_{a-t}^a (\mu(s) + y(t-a+s)\gamma(s)) ds} & \text{if } a \geq t, \\ \psi(t-a)e^{-\int_0^a (\mu(s) + y(t-a+s)\gamma(s)) ds} & \text{if } a < t. \end{cases}$$

1. First we prove that there exists t^* such that

$$\psi(t) > 0, \quad \forall t \in [t^*, t^* + a_1]$$

where a_1 defined by (2.5). We know that

$$\psi(t) \geq \int_{t_1}^{t_2} \beta(u+t)x_0(u)e^{-(\|\mu\|_{L^\infty} + M\|\gamma\|_{L^\infty})t} du, \quad \forall t \in [\underline{a} - t_1, \bar{a} - t_2]$$

where

$$M = \max_{u \in [0, \bar{a} - t_2]} y(u) < \infty$$

so that

$$\psi(t) \geq \sigma_1 := \eta_1 \eta_2 e^{-(\|\mu\|_{L^\infty} + M\|\gamma\|_{L^\infty})(\bar{a} - t_2)} > 0, \quad \forall t \in [\underline{a} - t_1, \bar{a} - t_2]$$

by Hypotheses (P) and (H2). Either

$$\bar{a} - t_2 - (\underline{a} - t_1) \geq a_1$$

and this step is done, or we continue by defining

$$\varepsilon \in (0, \bar{a} - t_2 - (\underline{a} - t_1)).$$

Then we prove that

$$\psi(t) \geq \sigma_2 := \eta_1 \sigma_1 (t_2 - t_1) e^{-\|\mu\|_{L^\infty} + \tilde{M}\|\gamma\|_{L^\infty} (2\bar{a} - t_2 - \varepsilon)} > 0,$$

for every $t \in [2\underline{a} - t_1 + \varepsilon, 2\bar{a} - t_2 - \varepsilon]$, where

$$\tilde{M} = \max_{u \in [0, 2\bar{a} - t_2 - \varepsilon]} y(u) < \infty.$$

If

$$\bar{a} - t_2 - (\underline{a} - t_1) + (\bar{a} - \underline{a} - \varepsilon) \geq a_1$$

we stop, else we continue. Since we get each time a bigger interval on which ψ is positive then we get what we wanted.

2. With this suitable t^* , we can even prove that

$$\psi(t) > 0, \quad \forall t \geq t^*.$$

Indeed, since $R_- > 0$, there exists $\epsilon \in (0, a_1)$ such that

$$\int_{\epsilon}^{a_1} \beta(u) du > 0.$$

Then for every $\bar{\epsilon} \in [0, \epsilon]$ we have

$$\psi(t^* + a_1 + \bar{\epsilon}) \geq \int_{t^* + \bar{\epsilon}}^{t^* + a_1} \psi(u) \beta(t^* + \bar{\epsilon} + a_1 - u) e^{-(t^* + \bar{\epsilon} + a_1 - u) \|\mu\|_{L^\infty}} du > 0.$$

Doing this step by step, we finally prove that $\psi(t) > 0$ for every $t \geq t^*$.

3. Now we prove that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \infty.$$

We see that

$$\psi(t^* + a_1) \geq \psi(\underline{t}) R_-,$$

where $\psi(\underline{t}) = \min_{u \in [t^*, t^* + a_1]} \psi(u)$. Moreover for every $h > 0$ we have

$$\psi(t^* + a_1 + h) \geq R_- \min_{u \in [t^* + h, t^* + a_1 + h]} \psi(u) \geq \psi(\underline{t}) R_-$$

so

$$\psi(t^* + 2a_1 + h) \geq R_- \min_{u \in [t^* + a_1 + h, t^* + 2a_1 + h]} \psi(u) \geq \psi(\underline{t}) R_-^2, \forall h > 0.$$

Once again, by induction and since $R_- > 1$ we verify that $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \infty$.

4. Since for every $a \in [0, a_1]$ and every $t > a$ we have

$$x(t, a) = \psi(t - a) e^{-\int_0^a \mu(s) ds},$$

then

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, a) = \infty, \quad \forall a \in [0, a_1].$$

Consequently we have

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} = \infty.$$

Now, let us suppose that there exists $M > 0$ such that for every $t \geq 0$ we have

$$y(t) \leq M.$$

Then a lower bound of Problem (2.1) gives

$$x(t, a) \geq \begin{cases} x_0(a - t) e^{-(\|\mu\|_{L^\infty} + M \|\gamma\|_{L^\infty})t} & \text{if } a \geq t, \\ \psi(t - a) e^{-(\|\mu\|_{L^\infty} + M \|\gamma\|_{L^\infty})a} & \text{if } a < t, \end{cases}$$

for every $t \geq 0$. Since $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \infty$, then for every $\bar{M} > 0$, there exists $t^* > 0$ such that

$$\psi(t) \geq \bar{M}, \quad \forall t \geq t^*.$$

Consequently, we have

$$x(t, a) \geq \bar{M}e^{-(\|\mu\|_{L^\infty} + M\|\gamma\|_{L^\infty})a_2} =: \bar{M}C,$$

for every $t \geq t^* + a_2$ and every $a \in (a_1, a_2)$. From Problem (2.1) and Remark 2.3.1 we deduce that

$$y'(t) \geq \left[\alpha \int_{a_1}^{a_2} \gamma(a)x(t, a)da - \delta \right] y(t) \geq [\alpha\gamma_- \bar{M}C - \delta] y(t) =: \bar{C}y(t),$$

for every $t \geq t^* + a_2$. Taking \bar{M} big enough, we get $\bar{C} > 0$. Finally, an integration of the latter equation gives

$$y(t) \geq y(t^* + a_2)e^{-\bar{C}(t^* + a_2)}e^{\bar{C}t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$$

for every $t \geq t^* + a_2$, which is a contradiction with the fact that y is bounded.

5. Consequently there exists an increasing sequence $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y(t_n) = \infty.$$

Thus for every $M > 0$, there exists $n^* \in \mathbb{N}$ such that

$$y(t_n) \geq M, \quad \forall n \geq n^*.$$

Suppose that $y(t)$ does not go to ∞ when t goes to ∞ . Then there would exist $\varepsilon > 0$ such that for every $n \in \mathbb{N}$, there exists $\bar{t} > t_n$ that verifies

$$y(\bar{t}) < \varepsilon.$$

Obviously there exists $n^* \in \mathbb{N}$ such that

$$\bar{t} \in [t_{n^*}, t_{n^*+1}],$$

meaning that

$$y(t_{n^*}) \geq M, \quad y(\bar{t}) < \varepsilon, \quad y(t_{n^*+1}) \geq M.$$

Let

$$M \geq K := \varepsilon e^{\delta(a_2 - a_1)},$$

then, using the continuity of y and the fact that

$$y'(t) \geq -\delta y(t),$$

we can find an interval

$$[t^*, t^* + (a_2 - a_1)] \subset [t_{n^*}, t_{n^*+1}]$$

such that

$$y'(t^* + (a_2 - a_1)) < 0 \tag{2.15}$$

and

$$y(t) \leq K, \quad \forall t \in [t^*, t^* + (a_2 - a_1)].$$

Moreover, by definition of a_1 , we can find a_2 such that $a_2 - a_1 < a_1$ even if we reduce γ_- . Since we have

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, a) = \infty, \quad \forall a \in [0, a_1]$$

then there exists $\underline{t} > 0$ such that

$$x(t, a) \geq \frac{\delta}{\alpha \gamma_-} e^{(a_2 - a_1)(\|\mu\|_{L^\infty} + K\|\gamma\|_{L^\infty})},$$

for every $t > \underline{t}$ and every $a \in [a_1 - (a_2 - a_1), a_1]$. Consider n big enough such that

$$t^* \geq \underline{t}.$$

Consequently we get

$$x(t^* + (a_2 - a_1), a) \geq \frac{\delta}{\alpha \gamma_-}$$

for every $a \in [a_1 - (a_2 - a_1), a_1]$ and then

$$y'(t^* + (a_2 - a_1)) \geq 0$$

which contradicts (2.15). Finally we have

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$$

and the proof is completed. □

Corollary 2.3.13. *Prey population and predator population are uniformly strongly persistent.*

The following result states that persistence may hold in the case where $R_- < 1$ but under the assumption $R_0 > 1$.

Theorem 2.3.14. *Suppose that $R_0 > 1$ and $R_- < 1$. Then the total population of prey and the total population of predator are uniformly weakly persistent.*

Proof.

1. First, suppose that given a fixed $\varepsilon > 0$, there exists $(x_0, y_0) \in \mathcal{X}_p$ (that may depend on ε) such that

$$\sigma_{\rho_2}^+(x_0, y_0) < \varepsilon. \tag{2.16}$$

Since we have $R_0 > 1$, then there exists $a^* > 0$ such that

$$C := \int_0^{a^*} \beta(z) e^{-\int_0^z \mu(s) ds} dz > 1.$$

Let us take $\bar{C} \in (1, C)$ and define

$$\bar{M} = \frac{1}{a^* \|\gamma\|_{L^\infty}} \ln \left(\frac{C}{\bar{C}} \right) > 0.$$

Consider ε small enough, then (2.16) leads to

$$y(t) \leq \overline{M},$$

for every $t \geq \bar{t}$ big enough. Moreover y is bounded by a positive constant M and, using the last proof, we get

$$\psi(t) > 0, \quad \forall t \geq t^*.$$

Consequently, defining

$$\tilde{t} = \max\{t^*, \bar{t}\},$$

we get

$$\psi(\tilde{t} + a^*) \geq \psi(\underline{t})\overline{C},$$

where

$$\psi(\underline{t}) = \overline{C} \min_{u \in [\underline{t}, \underline{t} + a^*]} \psi(u).$$

Using the last proof with respectively $\tilde{t}, a^*, \overline{C}$ instead of t^*, a_1, R_- : we get

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \infty$$

then

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$$

since y is bounded, which is a contradiction. Thus we get the persistence result for the predator.

2. Now suppose that for $\varepsilon > 0$ fixed, there exists $(x_0, y_0) \in \mathcal{X}_p$ such that

$$\sigma_{\rho_1}^+(x_0, y_0) < \varepsilon.$$

Taking ε small enough we get

$$\|x(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} < \frac{\delta}{\alpha \|\gamma\|_{L^\infty}}$$

for all $t \geq \bar{t}$ big enough, so that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

using the second equation of (2.1). We then get a contradiction by using the first point. Consequently the proof is completed. □

2.4 Numerical simulations

The following numerical simulations, that are performed using the finite volume method, aim at investigating other behavior of the dynamical system (2.1) under some biologically reasonable parameters.

2.4.1 Numerical scheme

We define the intervals $a \in [0, a_{\max}]$ and $t \in [0, T]$ then we note Δa and Δt respectively the age and the time steps. We define

$$a_{j+1/2} = j\Delta a, \quad t^n = n\Delta t,$$

for $j, n \in \mathbb{N}$ then we note

$$K_j = (a_{j-1/2}, a_{j+1/2}).$$

We denote by x_j^n the approximation of the average of $x(t^n, a)$ over K_j and we compute the initial states

$$x_j^n \approx \frac{1}{\Delta a} \int_{K_j} x(t^n, a) da, \quad x_j^0 = \frac{1}{\Delta a} \int_{K_j} x_0(a) da, \quad y^0 = y_0, \quad \forall j \geq 1.$$

We then set $\alpha, \delta > 0$ and once β, μ, γ are chosen, we compute the data :

$$\beta_j = \frac{1}{\Delta a} \int_{K_j} \beta(a) da, \quad \mu_j = \frac{1}{\Delta a} \int_{K_j} \mu(a) da, \quad \gamma_j = \frac{1}{\Delta a} \int_{K_j} \gamma(a) da, \quad \forall j \geq 1.$$

We define

$$\mathcal{T}(\gamma x^n) = \Delta a \sum_{j \geq 1} \gamma_j x_j^n,$$

so that an Euler's Scheme (explicit for the predation term and implicit for the mortality term) of the second equation of (2.1) gives

$$y_{n+1} = \frac{y_n(1 + \alpha \Delta t \mathcal{T}(\gamma x^n))}{1 + \delta \Delta t}, \quad \forall n \geq 0.$$

Integrating the first equation of (2.1) regarding a over K_j and supposing x regular enough, we get

$$\partial_t \int_{K_j} x(t, a) da + x(t, a_{j+1/2}) - x(t, a_{j-1/2}) = - \int_{K_j} [\mu(a) + y(t)\gamma(a)] x(t, a) da.$$

Then, an Euler's scheme and the integrals estimates give us

$$x_{j+1}^{n+1} = \frac{x_{j+1}^n + \frac{\Delta t}{\Delta a} x_j^{n+1}}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta a} + \Delta t \mu_{j+1} + \Delta t y^{n+1} \gamma_{j+1}}, \quad \forall j \geq 0, \forall n \geq 1.$$

Moreover, the boundary conditions gives us

$$x_0^{n+1} = \Delta a \sum_{j \geq 1} \beta_j x_j^n, \quad \forall n \geq 1.$$

Then we have the following theorem which guarantees positivity of the numerical solution.

Theorem 2.4.1. *If $(x_0, y_0) \in \mathcal{X}_+$ then $\forall j \geq 1, n \geq 1$, we have $x_j^n \geq 0$ and $y_j \geq 0$.*

2.4.2 Simulations

According to biological considerations, let us use the following functions :

1. $\mu(a) = \mu_0 + \mu_0 a / (1 + ah)$ with $\mu_0 > 0$ and $h \in \mathbb{R}_+^*$: the older is the prey, the easier she dies naturally,
2. $\beta(a) = \beta_0 a e^{-ca}$ with $\beta_0, c > 0$: the middle-aged preys are the one that reproduce themselves the most,
3. $\gamma(a) = \gamma_0 (1 - a g e^{1-ga})$, with $\gamma_0 > 0, g > 0$: the young and the old preys are more easily killed by the predators.

For our simulations we take the parameters : $a_{\max} = 20, \Delta a = 0.1, \alpha = 0.7, \delta = 0.1, \mu_0 = 0.05, h = 1, c = 1, g = 0.25, \gamma_0 = 0.5$ and we represent the trajectory of the solution with on the x -axis the quantity of predator and on the y -axis the total quantity $\|x\|_{L^1}$ of prey.

If we take $\beta_0 = 1$, we have $R_0 < 1$, so for all $(x_0, y_0) \in \mathcal{X}_+$ the solution will converge to E_0 : Theorem 2.3.5 (see figure 2.1).

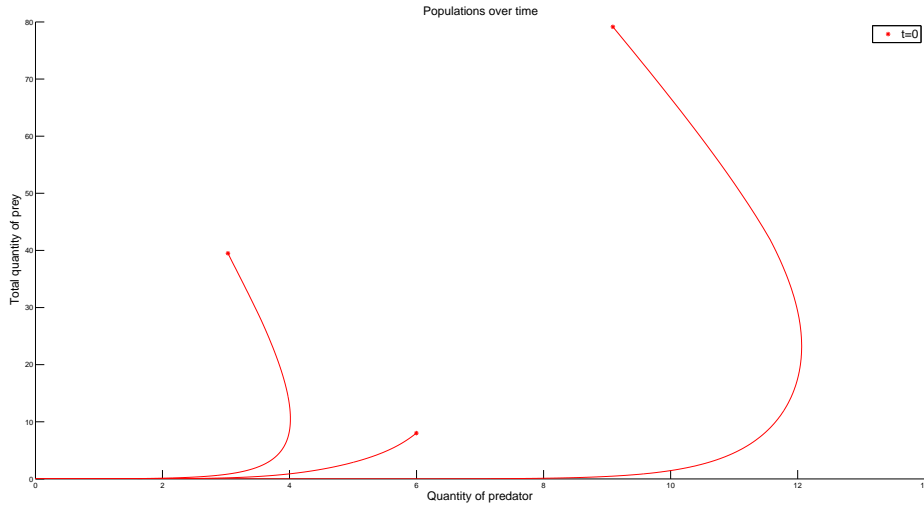


FIGURE 2.1 – Convergence to E_0

If we take $\beta_0 = 4$ or $\beta_0 = 7$, then the simulations make us suppose that the solution is bounded for any positive initial conditions $(x_0, y_0) \in \mathcal{X}_P$. Moreover we have $R_0 > 1, R_- < 1$ and (H2) is verified since $\beta_0(a) > 0$ a.e. $a \geq 0$. Consequently of Theorem 2.3.14, the total populations are uniformly weakly persistent and the solution will either converge to a periodic function if $\beta_0 = 4$ (see figure 2.2) or converge to E_2 if $\beta_0 = 7$ (see figure 2.3).

If we take $\beta_0 = 7$ and if we consider the function

$$\gamma(a) = \gamma_0 (1 - a g e^{1-ga}) \mathbf{1}_{[2, \infty)}(a)$$

then (P), (H2) are verified and $R_- > 1$ so consequently to Theorem 2.3.12 : the solutions explode (see figure 2.4).

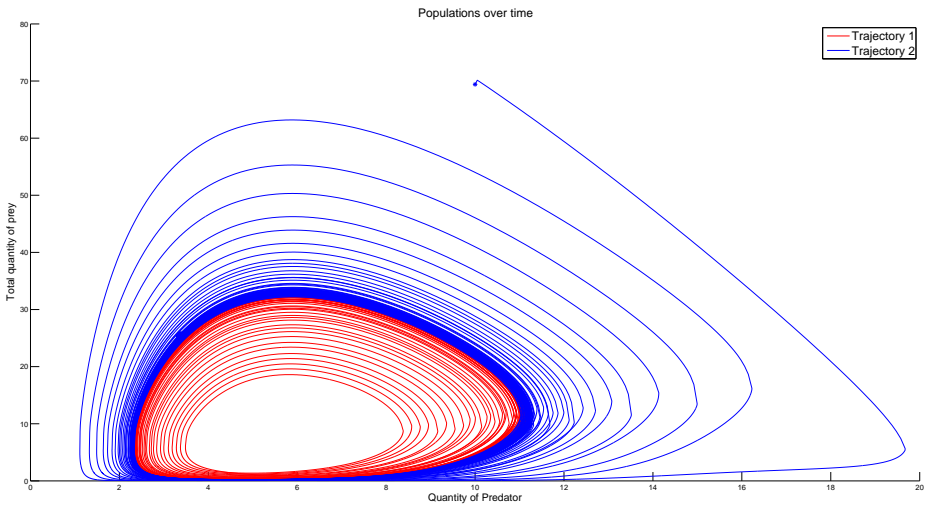


FIGURE 2.2 – Convergence to a periodic function

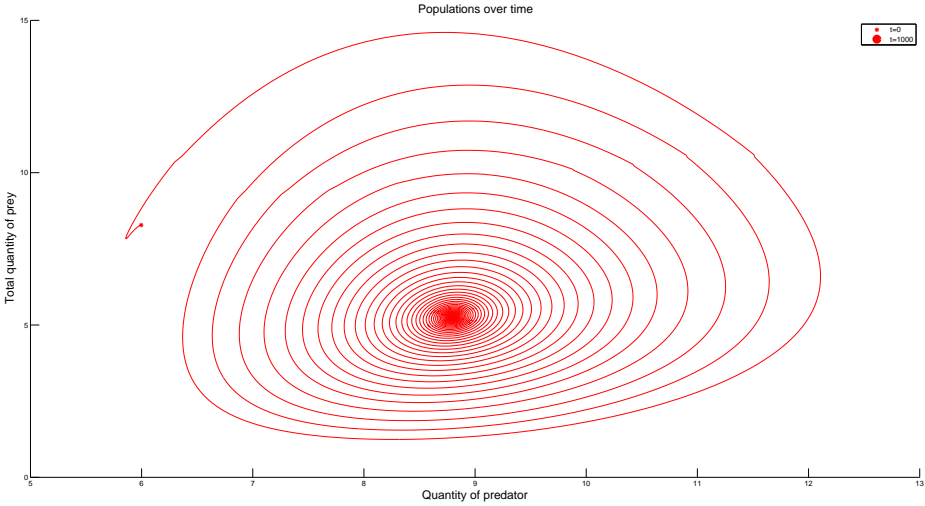


FIGURE 2.3 – Convergence to E_2

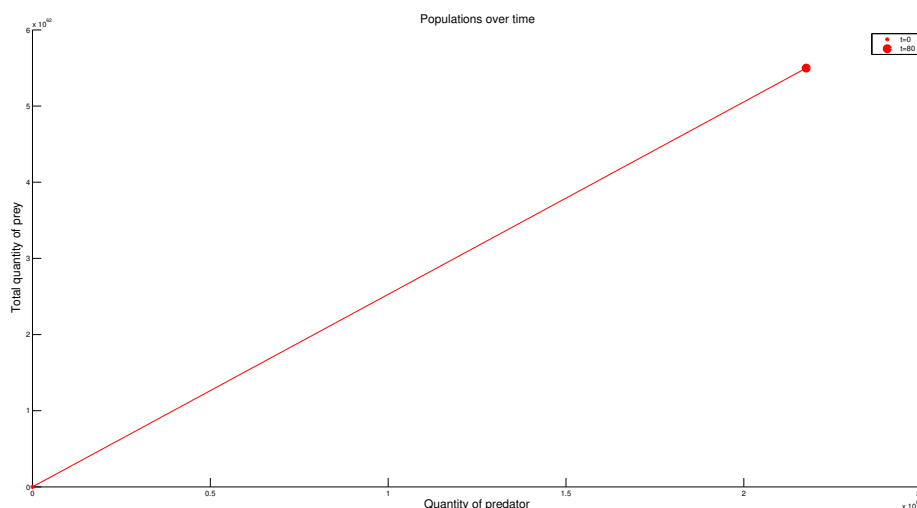


FIGURE 2.4 – Unbounded solution

2.4.3 Final remarks

All the cases that we have studied theoretically and numerically are gathered in Table 2.1. One can note that, even when considering a linear functional response, a structure according to the age of the preys provides more complex dynamics of the predator-prey interactions than the Lotka Volterra ODE model. In particular, the realistic case of extinction of the population may occur. Indeed, we proved that, depending on the age distribution of the fertility rate and of the mortality rate of the preys, the total population tends to disappear. This phenomenon happens when a prey will produce, in average, less than one direct offspring during its lifespan, translated by $R_0 < 1$. In the opposite case, when $R_0 > 1$, we proved that under the assumption that the initial prey population is young enough (i.e. assumption (P)) then the total population is uniformly weakly persistent.

$R_0 < 1$	$R_0 > 1$ and (P)	
Convergence to E_0	$R_- < 1$	$R_- > 1$
	Limit cycle or Convergence to E_2	Unbounded solutions

TABLE 2.1 – Different behaviors

The model shows another unexpected behavior : if the young preys "uncatchable" by predators have a high enough ability to reproduce, which is translated by ($R_- > 1$), then both populations explode. This phenomenon, even if rare and perhaps biologically impossible, was not possible in the ODE case as well as in the PDE model incorporating a constant predation parameter. Finally in the other cases that were numerically investigated (i.e. when $R_0 > 1$, $R_- < 1$ and (P) is verified) the solution converges either to a periodic function or to a positive equilibrium.

A further work will be dedicated to a deeper analysis of the equilibrium E_2 in order to

determine under which conditions it is asymptotically stable, and to theoretically look for the existence of periodic trajectories.

2.5 Appendix : a brief reminder of Lotka Volterra

The classical result of Lotka-Volterra is reminded in Section 1.5.3. Moreover, a formal integration with respect to the age variable a explains how the age-structured PDE problem (2.1) can be seen as a generalization of the Lotka Volterra equations, as stated in the following proposition :

Proposition 2.5.1. *Suppose that parameters γ, β and μ are independent of the age, given by the following constants : $\gamma(a) = \gamma_0$, $\beta(a) = \beta_0$ and $\mu(a) = \mu_0$ a.e. $a \geq 0$. Then $(X(t), y(t)) := (\int_0^\infty x(t, a) da, y(t))$ is the solution of system (1.15) with $a = \beta_0 - \mu_0$, $b = \gamma_0$, $c = \alpha\gamma_0$, $d = \delta$, $x^0 = \int_0^\infty x_0(a)da$ and $y^0 = y_0$. Hence we get periodic solutions in that case (see figure 2.5).*

Remark 2.5.2. As it was explained in Section 2.2 we have $D(\mathcal{A}) \subset W^{1,1}(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}$. Then for every initial condition $(x_0, y_0) \in D(\mathcal{A})$, the function

$$a \mapsto x(t, a)$$

remains in $W^{1,1}(\mathbb{R}_+)$ for every $t \geq 0$. A consequence is that

$$\lim_{a \rightarrow \infty} x(t, a) = 0$$

for every $t \geq 0$. Consequently

$$\int_0^\infty \partial_a x(t, a) da = -\beta_0 X(t)$$

and the formal integration w.r.t. a is possible.

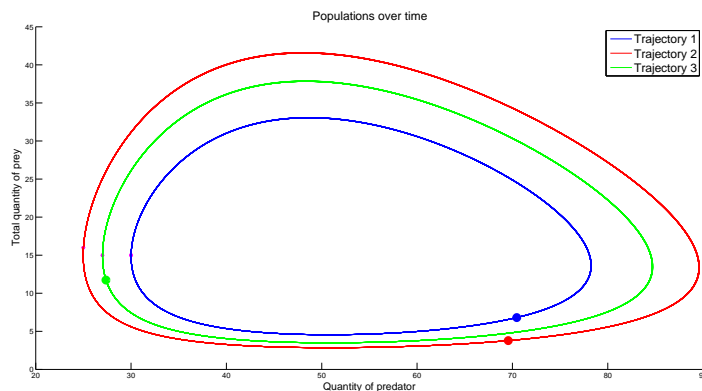


FIGURE 2.5 – Periodic solutions

Chapitre 3

Size-structured two phase population model

3.1 Models with bounded sizes

3.1.1 Framework and hypotheses

In this section we consider the equation

$$\begin{cases} \partial_t u_1(t, s) + \partial_s(\gamma_1(s)u_1(t, s)) &= -\mu(s)u_1(t, s) + \int_0^m \beta(s, y)u_1(t, y)dy \\ &\quad -c_1(s)u_1(t, s) + c_2(s)u_2(t, s), \\ \partial_t u_2(t, s) + \partial_s(\gamma_2(s)u_2(t, s)) &= c_1(s)u_1(t, s) - c_2(s)u_2(t, s), \end{cases} \quad (3.1)$$

for every $s \in [0, m]$, with Dirichlet boundary conditions

$$u_1(t, 0) = 0, \quad u_2(t, 0) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.2)$$

We define the Banach space

$$\mathcal{X} = (L^1(0, m) \times L^1(0, m), \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$$

endowed with the norm

$$\|(u_1, u_2)\|_{\mathcal{X}} = \|u_1\|_{L^1(0, m)} + \|u_2\|_{L^1(0, m)}.$$

We denote by \mathcal{X}_+ the nonnegative cone of \mathcal{X} and we introduce some hypotheses on the different parameters :

1. $\mu, c_1, c_2 \in L^\infty(0, m)$ and $\gamma_1, \gamma_2 \in W^{1, \infty}(0, m)$,
2. $\beta, \mu, c_1, c_2 \geq 0$ and there exists $\gamma_0 > 0$ such that for every $s \in [0, m]$, $\gamma_1(s) \geq \gamma_0, \gamma_2(s) \geq \gamma_0$,
3. the operator

$$K : L^1(0, m) \ni u \mapsto \int_0^m \beta(\cdot, y)u(y)dy \in L^1(0, m)$$

is weakly compact.

Remark 3.1.1. According to the general criterion of weak compactness (see e.g. Section 4 in [156]), the third hypothesis amounts to

$$\sup_{y \in [0, m]} \int_0^m \beta(s, y) ds < \infty \text{ and } \lim_{|E| \rightarrow 0} \sup_{y \in [0, m]} \int_E \beta(s, y) ds = 0$$

and is satisfied as soon as there exists $\tilde{\beta} \in L^1(0, m)$ such that $\beta(s, y) \leq \tilde{\beta}(s)$ a.e. $(s, y) \in [0, m]^2$. This is the case for example if β is continuous on $[0, m]^2$.

Using (3.1), we define the operator \mathcal{A} by :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(\gamma_1 u_1)' \\ -(\gamma_2 u_2)' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(\mu + c_1)u_1 + c_2 u_2 + \int_0^m \beta(\cdot, y) u_1(y) dy \\ -c_2 u_2 + c_1 u_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

where the domain of A is given by

$$D(A) = \{(u_1, u_2) \in W^{1,1}(0, m) \times W^{1,1}(0, m) : u_1(0) = 0, u_2(0) = 0\}.$$

We decompose B into three operators :

$$\begin{aligned} B \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= B_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + B_2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + B_3 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(\mu + c_1)u_1 \\ -c_2 u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 u_2 \\ c_1 u_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^m \beta(\cdot, y) u_1(y) dy \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

We are then concerned with the following Cauchy problem

$$\begin{cases} U'(t) = \mathcal{A}U(t), \\ U(0) = (u_1^0, u_2^0) \in \mathcal{X}, \end{cases}$$

where

$$U(t) = (u_1(t), u_2(t))^T.$$

3.1.2 Semigroup generation

Lemma 3.1.2. Let $H = (h_1, h_2) \in \mathcal{X}$, $\lambda > s(A)$ and $U = (\lambda I - A)^{-1}H := (u_1, u_2) \in D(A)$. Then for every $s \in [0, m]$

$$\begin{cases} u_1(s) = \int_0^s \frac{h_1(y)}{\gamma_1(y)} \exp\left(-\int_y^s \frac{\lambda + \gamma_1'(u)}{\gamma_1(u)} du\right) dy, \\ u_2(s) = \int_0^s \frac{h_2(y)}{\gamma_2(y)} \exp\left(-\int_y^s \frac{\lambda + \gamma_2'(u)}{\gamma_2(u)} du\right) dy. \end{cases} \quad (3.3)$$

Consequently we get $\text{supp } u_1 = (\inf \text{supp } h_1, m]$ and $\text{supp } u_2 = (\inf \text{supp } h_2, m]$.

Theorem 3.1.3. The operator \mathcal{A} generates a positive C_0 -semigroup $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ of bounded linear operators on \mathcal{X} .

Proof. We easily see that $D(A)$ is densely defined in \mathcal{X} . Moreover, for $\lambda > 0$ sufficiently large, the range condition

$$(\lambda I - A)U = H,$$

where $U = (u_1, u_2)$ and $H = (h_1, h_2) \in \mathcal{X}$, is straightforward since (u_1, u_2) is given by (3.3) so for $\lambda \geq \|\gamma'\|_{L^\infty}$ and $i \in \{1, 2\}$

$$\|u_i\|_{L^1(0,m)} \leq \frac{\|h\|_{L^1(0,m)}}{\gamma_0} < \infty$$

and

$$\|u'_i\|_{L^1(0,m)} \leq \frac{(\lambda + \|\gamma'\|_{L^\infty(0,m)})\|u\|_{L^1(0,m)} + \|h\|_{L^1(0,m)}}{\gamma_0} < \infty$$

hence $U \in D(A)$. It remains to prove that A is a dissipative operator. Let $\lambda > 0$, $U = (u_1, u_2) \in D(A)$, $H = (\lambda I - A)U$ and $H = (h_1, h_2)$. We have to prove that

$$\|H\|_{\mathcal{X}} \geq \lambda\|U\|_{\mathcal{X}}$$

so, in fact, we have to show that for every $i \in \{1, 2\}$,

$$\|h_i\|_{L^1(0,m)} \geq \lambda\|u_i\|_{L^1(0,m)}.$$

By definition we have $u_i(0) = 0$ and

$$\lambda u_i(s) + (\gamma_i u_i)'(s) = h_i(s), s \in (0, m].$$

We multiply the latter equation by $\text{sign}(u_i(s))$ then integrate between 0 and m . We get

$$\lambda\|u_i\|_{L^1(0,m)} + \int_0^m (\gamma_i u_i)'(s) \text{sign}(u_i(s)) ds = \int_0^m h_i(s) \text{sign}(u_i(s)) ds.$$

Any nonempty open set of the real line is a finite or countable union of *disjoints* open intervals (see [3] Theorem 3.11, p. 51) so

$$\begin{aligned} \{u_i > 0\} &= \{s \in (0, m) : u_i(s) > 0\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (a_{i,1}, a_{i,2}), \\ \{u_i < 0\} &= \{s \in (0, m) : u_i(s) < 0\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (b_{i,1}, b_{i,2}). \end{aligned}$$

Since $u_i \in W^{1,1}(0, m) \hookrightarrow C([0, m])$ then $\forall i, j \in \mathbb{N} : u_i(a_{i,1}) = 0, u_i(a_{i,2}) = 0, u_i(b_{j,1}) = 0$ and $u_i(b_{j,2}) = 0$ (except possibly at m). Thus

$$\begin{aligned} &\int_0^m (\gamma_i u_i)' \text{sign}(u_i) = \int_{\{u_i > 0\}} (\gamma_i u_i)' - \int_{\{u_i < 0\}} (\gamma_i u_i)' \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} [\gamma_i(a_{j,2})u_i(a_{j,2}) - \gamma_i(a_{j,1})u_i(a_{j,1})] - \sum_{j \in \mathbb{N}} [\gamma_i(b_{j,2})u_i(b_{j,2}) - \gamma_i(b_{j,1})u_i(b_{j,1})] \\ &= \gamma_i(m) |u_i(m)| \geq 0. \end{aligned}$$

Hence

$$\lambda\|u_i\|_{L^1} \leq \lambda\|u_i\|_{L^1} + \gamma_i(m)|u_i(m)| = \int_0^m h_i(s) \text{sign}(u_i(s)) ds \leq \|h_i\|_{L^1}$$

and we get the dissipativity of A .

Thus A generates a C_0 -semigroup $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ by Lumer-Phillips Theorem (see [115] Theorem 4.3, p. 14). Finally, as bounded perturbations of A , the operators $A + B_1$, $A + B_1 + B_2$ and \mathcal{A} also generate a quasi-contraction C_0 -semigroup $\{T_1(t)\}_{t \geq 0}$, $\{T_2(t)\}_{t \geq 0}$ and $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ respectively. □

3.1.3 On irreducibility

To understand time asymptotics of $\{U(t)\}_{t \geq 0}$, we need to prove a key result related to positivity. Definitions and results about positive and irreducible operators are reminded in Section A.4. Let the following assumptions

$$\forall \varepsilon \in (0, m), \quad \int_0^\varepsilon \int_\varepsilon^m \beta(s, y) dy ds > 0, \quad (3.4)$$

$$\inf \text{supp } c_1 = 0, \quad (3.5)$$

$$\sup \text{supp } c_2 = m. \quad (3.6)$$

Theorem 3.1.4. *The C_0 -semigroup $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ is positive. Moreover, it is irreducible if and only if the assumptions (3.4)-(3.5)-(3.6) are verified.*

Proof. 1. We show first that the semigroup $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ is positive. Using Lemma 3.1.2, we readily see that the semigroup $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ is positive since $(\lambda I - A)^{-1}$ is positive for λ large enough. Since B_1 is a bounded operator and

$$B_1 + \|B_1\|I \geq 0$$

where $\|B_1\| = \max(\|\mu\|_{L^\infty} + \|c_1\|_{L^\infty}, \|c_2\|_{L^\infty})$ then it follows (see e.g. [113] Theorem 1.11, C-II, p. 255) that $\{T_1(t)\}_{t \geq 0}$ is positive. Moreover, B_2 and B_3 are positive operators, so for λ large enough, we get

$$(\lambda I - A - B_1 - B_2)^{-1} = (\lambda I - A - B_1)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (B_2(\lambda I - A - B_1)^{-1})^n \geq 0$$

and

$$(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} = (\lambda I - A - B_1 - B_2)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (B_3(\lambda I - A - B_1 - B_2)^{-1})^n \geq 0$$

so the C_0 -semigroups $\{T_2(t)\}_{t \geq 0}$ and $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ are positive.

2. Now we suppose that the assumptions (3.4)-(3.5)-(3.6) are verified and we prove that the resolvent $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ is positivity improving for large λ . In fact, since $B_1 + \|B_1\|I \geq 0$, we have

$$\begin{aligned} (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} &= ((\lambda + \|B_1\|)I - A - (B_1 + \|B_1\|I) - B_2 - B_3)^{-1} \\ &\geq ((\lambda + \|B_1\|)I - A - B_2 - B_3)^{-1} \end{aligned}$$

so it suffices to show that $(\lambda I - A - B_2 - B_3)^{-1}$ is positivity improving for λ large enough.

It is easy to see that

$$\begin{aligned} (\lambda I - A - B_2 - B_3)^{-1} &= (\lambda I - A - B_2)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (B_3(\lambda I - A - B_2)^{-1})^n \\ &= (\lambda I - A)^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} (B_2(\lambda I - A)^{-1})^l \sum_{n=0}^{\infty} (B_3(\lambda I - A - B_2)^{-1})^n. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Since

$$\sum_{n=0}^{\infty} (B_2(\lambda I - A)^{-1})^n \geq I + B_2(\lambda I - A)^{-1}$$

and

$$(\lambda I - A - B_2)^{-1} \geq (\lambda I - A)^{-1}(I + B_2(\lambda I - A)^{-1}) \geq (\lambda I - A)^{-1}$$

we get

$$\begin{aligned} & (\lambda I - A - B_2 - B_3)^{-1} \\ \geq & (\lambda I - A)^{-1}(I + B_2(\lambda I - A)^{-1}) \sum_{n=0}^{\infty} (B_3(\lambda I - A - B_2)^{-1})^n \\ \geq & (\lambda I - A)^{-1}(I + B_2(\lambda I - A)^{-1}) \sum_{n=0}^{\infty} (B_3(\lambda I - A)^{-1})^n (I + B_2(\lambda I - A)^{-1}) \end{aligned}$$

Let $U := (u_1, u_2) = (\lambda I - A - B_2 - B_3)^{-1}H$ with $H \in \mathcal{X}_+$. Let us show that

$$u_1(s) > 0, \quad u_2(s) > 0 \quad \text{a.e.}$$

once

$$H = (h_1, h_2) \in \mathcal{X}_+ - \{0\}.$$

First, suppose that $H = (0, h_2) \in \mathcal{X}_+ - \{0\}$. Using Lemma 3.1.2, we get

$$(\lambda I - A)^{-1}H = (0, h_3) \in D(A),$$

where

$$\text{supp } h_3 = (\inf \text{supp } h_2, m].$$

Since by assumption (3.6) we have $\sup \text{supp } c_2 = m$ then

$$\text{supp } c_2 \cap \text{supp } h_3 \neq \emptyset.$$

Thus

$$B_2(\lambda I - A)^{-1}H = (h_4, 0)$$

where $h_4 \in L_+^1 - \{0\}$. So

$$(I + B_2(\lambda I - A)^{-1})H \geq (h_4, 0) \in \mathcal{X}_+ - \{0\}.$$

Now suppose that $H = (h_1, 0) \in \mathcal{X}_+ - \{0\}$, then

$$(I + B_2(\lambda I - A)^{-1})H \geq H \geq (h_1, 0) \in \mathcal{X}_+ - \{0\}.$$

In any case it suffices to compute

$$(\lambda I - A)^{-1}(I + B_2(\lambda I - A)^{-1}) \sum_{n=0}^{\infty} (B_3(\lambda I - A)^{-1})^n H$$

for $H = (h, 0) \in \mathcal{X}_+ - \{0\}$. We have $(\lambda I - A)^{-1}H = (h_1, 0) \in D(A)$ where

$$\text{supp } h_1 = (\inf \text{supp } h, m].$$

Let

$$k_1 := \inf \text{supp } h_1 = \inf \text{supp } h.$$

Using (3.4), we get

$$B_3(\lambda I - A)^{-1}H = B_3(h_1, 0) = (h_2, 0)$$

where h_2 verifies

$$k_2 := \inf \text{supp } h_2 < k_1.$$

Indeed, by contradiction, if $k_2 \geq k_1$ then $h_2 \equiv 0$ on $[0, k_1]$. Thus a.e. $s \in [0, k_1]$,

$$\int_{k_1}^m \beta(s, y)h_1(y)dy \leq \int_0^m \beta(s, y)h_1(y)dy = h_2(s) = 0$$

then, since $h_1(y) > 0$ for every $y \in (k_1, m]$, we get a.e. $s \in [0, k_1]$,

$$\int_{k_1}^m \beta(s, y)dy = 0,$$

consequently we get

$$\int_0^{k_1} \int_{k_1}^m \beta(s, y)dyds = 0$$

which contradicts Assumption (3.4).

Using Lemma 3.1.2, we get

$$(\lambda I - A)^{-1}(B_3(\lambda I - A)^{-1})H = (\lambda I - A)^{-1}(h_2, 0) = (h_3, 0) \in D(A),$$

where $\text{supp } h_3 = (k_2, m]$ and $k_3 := \inf \text{supp } h_3 = k_2$. Then $B_3(h_3, 0) = (h_4, 0)$ where

$$k_4 := \inf \text{supp } h_4 < k_3.$$

Repeating this argument, we get

$$\sum_{n=0}^{\infty} (B_3(\lambda I - A)^{-1})^n H = (\bar{h}, 0),$$

where

$$\inf \text{supp } \bar{h} = 0.$$

Indeed, by contradiction, suppose that

$$\bar{k} := \inf \text{supp } \bar{h} > 0.$$

Then with Lemma 3.1.2 we get $(\lambda I - A)^{-1}(\bar{h}, 0) = (\bar{h}_1, 0)$ where

$$\text{supp } \bar{h}_1 = (\bar{k}, m]$$

and $B_3(\lambda I - A)^{-1}(\bar{h}, 0) = (\bar{h}_2, 0)$ where

$$\inf \text{supp } \bar{h}_2 < \bar{k}$$

by using Assumption (3.4), which is absurd.

So it remains to compute

$$(\lambda I - A)^{-1}(I + B_2(\lambda I - A)^{-1})H$$

for $H = (h, 0) \in \mathcal{X} - \{0\}$ where

$$\inf \text{supp } h = 0.$$

Using Lemma 3.1.2 we have

$$(\lambda I - A)^{-1}H = (h_1, 0),$$

where $h_1(s) > 0$ for every $s \in (0, m]$. Using Assumption (3.6) we get

$$B_2(\lambda I - A)^{-1}H = B_2(h_1, 0) = (0, h_2),$$

where

$$\inf \text{supp } h_2 = 0.$$

Once again with Lemma 3.1.2 we get

$$(\lambda I - A)^{-1}(0, h_2) = (0, h_3),$$

where $h_3(s) > 0$ for every $s \in (0, m]$. Finally

$$(u_1, u_2) := U = (\lambda I - A)^{-1}(I + B_2(\lambda I - A)^{-1})H \geq (h_1, h_3)$$

so

$$u_1(s) > 0, \quad u_2(s) > 0 \quad \text{a.e.}$$

so $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ is irreducible.

3. Now, to prove the converse, we use the contraposition. We suppose that either (3.4), (3.5) or (3.6) is not verified and we show that the semigroup is not irreducible.

(a) If (3.4) is not verified then

$$\exists \varepsilon \in (0, m) : \int_0^\varepsilon \int_\varepsilon^m \beta(s, y) dy ds = 0. \quad (3.8)$$

We identify $L^1(\varepsilon, m)$ the closed subspace of $L^1(0, m)$ of functions vanishing a.e. on $(0, \varepsilon)$. We can prove that $L^1(\varepsilon, m) \times L^1(\varepsilon, m)$ is a subspace of \mathcal{X} which is invariant under $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$. Indeed, since $B_1 \leq 0$, we have

$$(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \leq (\lambda I - (A + B_2 + B_3))^{-1} \quad (3.9)$$

where the latter resolvent is given by (3.7). Using Lemma 3.1.2 we get for every $H \in L^1(\varepsilon, m) \times L^1(\varepsilon, m)$, $(\lambda I - A)^{-1}H = (h_1, h_2)$ where

$$\inf \text{supp } h_1 \geq \varepsilon, \quad \inf \text{supp } h_2 \geq \varepsilon.$$

Moreover, for every $H \in L^1(\varepsilon, m) \times L^1(\varepsilon, m)$, we have $D_2H = (h_3, h_4)$ where

$$\inf \text{supp } h_3 \geq \varepsilon, \quad \inf \text{supp } h_4 \geq \varepsilon.$$

Finally, for every $H := (h_1, h_2) \in L^1(\varepsilon, m) \times L^1(\varepsilon, m)$, we have $B_3 H = (h_3, 0)$ where

$$h_3(s) = \int_0^m \beta(s, y) h_1(y) dy = \int_\varepsilon^m \beta(s, y) h_1(y) dy \leq \|h_1\|_{L^\infty} \int_\varepsilon^m \beta(s, y) dy = 0$$

a.e. $s \in [0, \varepsilon]$, using (3.8). Thus we get

$$\inf \text{supp } h_3 \geq \varepsilon.$$

Consequently, for every $H \in L^1(\varepsilon, m) \times L^1(\varepsilon, m)$,

$$(\lambda I - (A + B_2 + B_3))^{-1} H = (h_1, h_2)$$

where

$$\inf \text{supp } h_1 \geq \varepsilon, \quad \inf \text{supp } h_2 \geq \varepsilon.$$

Then $L^1(\varepsilon, m) \times L^1(\varepsilon, m)$ is a subspace of \mathcal{X} which is invariant under $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ so $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ is not irreducible and *a fortiori* not positivity improving, consequently $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ is not irreducible by definition.

(b) If (3.5) is not verified then let

$$k := \inf \text{supp } c_1 > 0$$

and take $H := (h_1, h_2) \in L^1(0, m) \times L^1(0, m) - \{0\}$ such that

$$\inf \text{supp } h_2 \geq k.$$

Then using (3.9) we have

$$(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} H \leq (\lambda I - (A + B_2 + B_3))^{-1} H =: (u_1, u_2)$$

where $(u_1, u_2) \in D(A)$ verify a.e. $s \in [0, m]$

$$\lambda u_2(s) + (\gamma_2 u_2)'(s) - c_1(s) u_1(s) = h_2(s).$$

Consequently a.e. $s \in [0, k]$ we get

$$\lambda u_2(s) + (\gamma_2 u_2)'(s) = 0$$

which leads to

$$u_2 \equiv 0 \text{ on } [0, k],$$

and then $L^1(0, m) \times L^1(k, m)$ is a subspace of \mathcal{X} which is invariant under $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$.

(c) If (3.6) is not verified then let

$$k := \sup \text{supp } c_2 < m$$

and take $H := (0, h_1) \in L^1(0, m) \times L^1(0, m) - \{0\}$ such that

$$\inf \text{supp } h_1 \geq k.$$

With Lemma 3.1.2, we get $(\lambda I - A)^{-1}(0, h_1) = (0, h_2)$ where

$$\inf \text{supp } h_2 \geq k.$$

Thus we have

$$D_2(0, h_2) = (c_2 h_2, 0) = (0, 0)$$

since

$$\text{supp } c_2 \cap \text{supp } h_2 = \emptyset.$$

Consequently

$$(\lambda I - (A + B_2))^{-1}H = (0, h_2)$$

then $B_3(0, h_2) = (0, 0)$ so

$$\sum_{n=0}^{\infty} (B_3(\lambda I - (A + B_2))^{-1})^n H = H$$

whence

$$\sum_{l=0}^{\infty} (B_2(\lambda I - A)^{-1})^l \sum_{n=0}^{\infty} (B_3(\lambda I - (A + B_2))^{-1})^n H = H$$

and using (3.7) we get

$$(\lambda I - (A + B_2 + B_3))^{-1}H = (0, h_2).$$

Finally (3.9) implies

$$(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}H \leq (0, h_2).$$

Consequently, $\{0\} \times L^1(k, m)$ is a subspace of \mathcal{X} which is invariant under $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$.

This concludes the proof. □

Remark 3.1.5. We note that in [50], the assumption (3.4) is replaced by the stronger assumption

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \quad \int_0^\varepsilon \int_{m-\varepsilon}^m \beta(s, y) dy ds > 0$$

which, in the continuous case, implies $\beta(0, m) > 0$ so that cells of maximal size can produce offspring of minimal size. With the assumption (3.4), it is not necessary and we even get the result for the mitosis case where every cell produce two offspring with half size, i.e. when

$$\beta(s, y) = 2\delta_{\{y=2s\}}$$

(see e.g. [9, 66, 67, 126] for similar works).

3.1.4 On the spectral bound of the generator

Lemma 3.1.6. *Let $k > 0$ be a positive constant and let $V : L^1(0, m) \rightarrow L^1(0, m)$ be the operator defined for every $s \in [0, m]$ and $h \in L^1(0, m)$ by*

$$Vh(s) = k \int_0^s h(y)dy,$$

then V is a Volterra operator and $\sigma(V) = \emptyset$.

Remark 3.1.7. Note that \mathcal{A} has a compact resolvent (and consequently the spectrum of \mathcal{A} is composed (at most) of isolated eigenvalues with finite algebraic multiplicity). This follows from the fact that the canonical injection $i : (D(A), \|\cdot\|_{D(A)}) \rightarrow (\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ is compact (by Rellich Kondrachov's Theorem) and $D(A) = D(\mathcal{A})$ since $D \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ (see e.g. Theorem A.3.3).

Theorem 3.1.8. *The operator $A+B_1+B_2$ has infinite spectral bound, i.e. $s(A+B_1+B_2) = -\infty$.*

Proof. Define the operators A_1 and A_2 by

$$A_i u = -(\gamma_i u)', \quad i \in \{1, 2\}$$

with $u \in D(A_1) = D(A_2) = \{u \in W^{1,1}(0, m) : u(0) = 0\}$. Thus, with Lemma 3.1.2, we have for every $s \in [0, m]$ and $i \in \{1, 2\}$,

$$(\lambda I - A_i)^{-1} h(s) \leq k_i \int_0^s h(y)dy := V_i h(s),$$

where k_1 and k_2 are positive constants. Since V_1 and V_2 are Volterra operators, we have

$$\sigma(V_1) = \emptyset, \quad \sigma(V_2) = \emptyset$$

using Lemma 3.1.6 and for $i \in \{1, 2\}$ we have

$$\sigma((\lambda - A_i)^{-1}) \subset \sigma(V_i) = \emptyset$$

so by definition

$$r_\sigma((\lambda - A_i)^{-1}) = 0,$$

where

$$r_\sigma(O) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(O)\}$$

is the *spectral radius* of O a bounded operator. On the other hand

$$r_\sigma((\lambda - A_i)^{-1}) = \frac{1}{\lambda - s(A_i)}$$

(Theorem A.4.6) so we have for every $i \in \{1, 2\}$, $s(A_i) = -\infty$ and consequently

$$s(A) = \max\{s(A_1), s(A_2)\} = -\infty,$$

because

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}.$$

Since $A + B_2$ has a compact resolvent, its spectrum is (at most) composed of eigenvalues. Thus, $\lambda \in \sigma(A + B_2)$ if and only if there exists $u = (u_1, u_2) \in \mathcal{X} - \{0\}$ such that

$$\lambda u = (A + B_2)u$$

which is equivalent to

$$\begin{aligned} (\lambda - A_1)u_1 &= c_2 u_2, \\ (\lambda - A_2)u_2 &= c_1 u_1 \end{aligned}$$

that is

$$u_1 = V_3 u_1, \quad u_2 = V_4 u_2,$$

where the positive operators V_3 and V_4 are given by

$$\begin{aligned} V_3 u &= (\lambda - A_1)^{-1} c_2 (\lambda - A_2)^{-1} c_1 u, \\ V_4 u &= (\lambda - A_2)^{-1} c_1 (\lambda - A_1)^{-1} c_2 u, \end{aligned}$$

which are bounded as follow

$$\begin{aligned} V_3 v(s) &\leq V_1 c_2 V_2 c_1 v(s) \leq k_3 V_1 V_2 v(s) \leq k_1 k_2 k_3 \int_0^s \int_0^y v(z) dz dy \\ V_4 v(s) &\leq V_2 c_1 V_1 c_2 v(s) \leq k_4 V_2 V_1 v(s) \leq k_1 k_2 k_4 \int_0^s \int_0^y v(z) dz dy, \end{aligned}$$

where k_3 and k_4 are positive constants. Then we readily see that

$$\begin{aligned} V_3 v(s) &\leq \bar{k}_3 \int_0^s v(y) dy =: \bar{V}_3 v(s) \\ V_4 v(s) &\leq \bar{k}_4 \int_0^s v(y) dy =: \bar{V}_4 v(s), \end{aligned}$$

where \bar{k}_3 and \bar{k}_4 are positive constants. Consequently

$$\lambda \in \sigma(A + B_2) \iff 1 \in \sigma(V_3) \cup \sigma(V_4).$$

Since \bar{V}_3 and \bar{V}_4 are Volterra operators then for every $i \in \{3, 4\}$ we have

$$\sigma(V_i) \subset \sigma(\bar{V}_i) = \emptyset.$$

Consequently 1 is not in $\sigma(V_3) \cup \sigma(V_4)$ and the spectrum of $A + B_2$ is empty so

$$s(A + B_2) = -\infty.$$

Finally, since B_1 is a nonpositive operator then $s(A + B_1 + B_2) \leq s(A + B_2) = -\infty$ which ends the proof. \square

Remark 3.1.9. Since $s(A + B_1 + B_2) = -\infty$, it is then necessary and sufficient that $s(\mathcal{A}) > -\infty$ to get a spectral gap. It is obtained under the following assumption

$$\exists \delta \in (0, m) : \int_0^\delta \int_\delta^m \beta(s, y) dy ds > 0, \quad (3.10)$$

as stated in the following theorem.

Theorem 3.1.10. *The spectral bound of \mathcal{A} is finite, i.e. $s(\mathcal{A}) > -\infty$, if and only if the the assumption (3.10) is verified.*

Proof. 1. Suppose that (3.10) is verified. By continuity of the integral, we can find $\delta_2 \in (\delta, m)$ such that

$$\int_0^\delta \int_{\delta_2}^m \beta(s, y) dy ds > 0. \quad (3.11)$$

The idea is to prove some irreducibility result of the resolvent of \mathcal{A} . Let $\lambda > s(\mathcal{A})$ then

$$(\lambda - \mathcal{A})^{-1} \geq (\lambda - (A + B_1 + B_3))^{-1} = \begin{pmatrix} (\lambda - (\tilde{A}_1 + K))^{-1} \\ (\lambda - \tilde{A}_2)^{-1} \end{pmatrix}$$

since $B_2 \geq 0$, where \tilde{A}_1 and \tilde{A}_2 are the positive operators defined by

$$\tilde{A}_1 u = -(\gamma_1 u)' - (\mu + c_1)u, \quad \tilde{A}_2 u = -(\gamma_2 u)' - c_2 u,$$

and $D(\tilde{A}_1) = D(\tilde{A}_2) = D(A_1)$. Thus we have

$$r_\sigma((\lambda - \mathcal{A})^{-1}) \geq \max\{r_\sigma((\lambda - (\tilde{A}_1 + K))^{-1}), r_\sigma((\lambda - \tilde{A}_2)^{-1})\}.$$

Since $\tilde{A}_2 \leq A_2$ then with Theorem 3.1.8 we have

$$s(\tilde{A}_2) \leq s(A_2) = -\infty$$

and $r_\sigma((\lambda - \tilde{A}_2)^{-1}) = 0$ so it remains to prove that

$$r_\sigma((\lambda - (\tilde{A}_1 + K))^{-1}) > 0.$$

We know that

$$(\lambda - (\tilde{A}_1 + K))^{-1} \geq ((\lambda + \|\mu\|_{L^\infty} + \|c_1\|_{L^\infty})I - (A_1 + K))^{-1}$$

so it suffices to prove that for $\lambda > 0$ large enough we have

$$r_\sigma((\lambda - (A_1 + K))^{-1}) > 0.$$

As in the proof of Theorem 3.1.4 we know that

$$(\lambda - (A_1 + K))^{-1} \geq (\lambda - A_1)^{-1} K (\lambda - A_1)^{-1}.$$

Let $v \in L^1(\delta, \delta_2)$, then using Lemma 3.1.2 we get

$$(\lambda - A_1)^{-1} v = v_1,$$

where $v_1(s) > 0$ for every $s \in (\inf \text{supp } v, m]$. In particular we have

$$v_1(s) > 0, \quad \forall s \in [\delta_2, m]$$

since $\inf \text{supp } v \leq \delta_2$. Then $K(\lambda - A_1)^{-1} v = K v_1 = v_2$ where

$$\inf \text{supp } v_2 \leq \delta.$$

Indeed by contradiction, if $\inf \text{supp } v_2 > \delta$ then $v_2 \equiv 0$ on $[0, \delta]$. We would have a.e. $s \in [0, \delta]$

$$\int_{\delta_2}^m \beta(s, y)v_1(y)dy \leq \int_0^m \beta(s, y)v_1(y)dy = v_2(s) = 0.$$

So a.e. $s \in [0, \delta]$ we would have

$$\int_{\delta_2}^m \beta(s, y)dy = 0$$

since $v_1(s) > 0$ for every $s \in [\delta_2, m]$, and consequently

$$\int_0^\delta \int_{\delta_2}^m \beta(s, y)dyds = 0,$$

which contradicts (3.11). Consequently using Lemma 3.1.2 we get

$$(\lambda - A_1)^{-1}K(\lambda - A_1)^{-1}v = (\lambda - A_1)^{-1}v_2 = v_3$$

where $v_3(s) > 0$ for every $s \in [\inf \text{supp } v_2, m]$ and in particular $v_3(s) > 0$ for every $s \in [\delta, \delta_2]$. This implies that for $\lambda > 0$ large enough and for every $v \in L^1(\delta, \delta_2)$ we have

$$(\lambda - (A_1 + K))^{-1}v(s) > 0, \quad \forall s \in [\delta, \delta_2]. \quad (3.12)$$

We also know that

$$(\lambda - (A_1 + K))^{-1} \geq (\lambda - (A_1 + K))_{|L^1(\delta, \delta_2)}^{-1} \geq \chi_{[\delta, \delta_2]}(\lambda - (A_1 + K))_{|L^1(\delta, \delta_2)}^{-1},$$

where $\chi_{[\delta, \delta_2]}$ is the indicator function of $[\delta, \delta_2]$, so

$$r_\sigma((\lambda - (A_1 + K))^{-1}) \geq r_\sigma(\chi_{[\delta, \delta_2]}(\lambda - (A_1 + K))_{|L^1(\delta, \delta_2)}^{-1}).$$

Since \mathcal{A} is resolvent compact then the operator

$$\chi_{[\delta, \delta_2]}(\lambda - (A_1 + K))_{|L^1(\delta, \delta_2)}^{-1} : L^1(\delta, \delta_2) \rightarrow L^1(\delta, \delta_2)$$

is compact and positivity improving with (3.12). Finally we get

$$r_\sigma(\chi_{[\delta, \delta_2]}(\lambda - (A_1 + K))_{|L^1(\delta, \delta_2)}^{-1}) > 0$$

(see Theorem A.4.7) and

$$r_\sigma((\lambda - \mathcal{A})^{-1}) > 0$$

whence $s(\mathcal{A}) > -\infty$.

2. Now to prove the converse, we use the contraposition. Suppose that the assumption (3.10) is not verified, that is

$$\forall \delta \in (0, m) : \int_0^\delta \int_\delta^m \beta(s, y)dyds = 0. \quad (3.13)$$

Suppose *momentarily* that $(\lambda - (A_1 + K))^{-1}$ is bounded by a Volterra operator V . Then following the same sketch of proof than for Theorem 3.1.8, we would have

$$\sigma((\lambda - (A_1 + K))^{-1}) \subset \sigma(V) = \emptyset$$

so $r_\sigma((\lambda - (A_1 + K))^{-1}) = 0$ and

$$s(A_1 + K) = -\infty.$$

Then we would have

$$s(A + B_3) = \max\{s(A_1 + K), s(A_2)\} = -\infty,$$

because

$$A + B_3 = \begin{pmatrix} A_1 + K \\ A_2 \end{pmatrix}.$$

As for Theorem 3.1.8, we can prove that

$$s(A + B_2 + B_3) = -\infty$$

and finally $s(\mathcal{A}) \leq s(A + B_2 + B_3) = -\infty$ since $B_1 \leq 0$. Consequently it remains to prove that $(\lambda - (A_1 + K))^{-1}$ is bounded by a Volterra operator. We know that

$$(\lambda - (A_1 + K))^{-1} = (\lambda - A_1)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (K(\lambda - A_1)^{-1})^n.$$

Let $v \in L^1(0, m) - \{0\}$ and let

$$k = \inf \text{supp } v.$$

Using Lemma 3.1.2 we have

$$(\lambda - A_1)^{-1}v = v_1$$

where $\text{supp } v_1 = (k, m]$ then

$$K(\lambda - A_1)^{-1}v = Kv_1 = v_2$$

with

$$v_2(s) = \int_0^m \beta(s, y)v_1(y)dy = \int_k^m \beta(s, y)v_1(y)dy$$

since $v_1 \equiv 0$ on $[0, k]$. Finally, using (3.13) with $\delta = k$ we get

$$\int_0^k \int_k^m \beta(s, y)dyds = 0$$

which implies

$$v_2(s) = 0 \quad \text{a.e. } s \in [0, k]$$

and then

$$(\lambda - (A_1 + k))^{-1}v(s) = 0 \quad \text{a.e. } s \in [0, k].$$

Consequently there exists a positive constant C such that for every $v \in L^1(0, m) - \{0\}$ we have

$$(\lambda - (A_1 + K))^{-1}v(s) \leq C \int_0^s v(y)dy =: Vv(s), \quad \text{a.e. } s \in [0, m],$$

and V is a Volterra operator. □

Remark 3.1.11. Theorem 3.1.10 provides us with the existence of a real leading eigenvalue since $s(\mathcal{A}) \in \sigma(\mathcal{A})$ (see Theorem A.4.5). Moreover, we see that if for a finite $\bar{m} > 0$, the assumption (3.10) is verified then it is also verified for every $m \geq \bar{m}$ and the spectral bound is also finite. Note that if β is continuous at $(0, 0)$ with $\beta(0, 0) > 0$ then (3.10) is verified for $m > 0$ as small as we want.

3.1.5 On asynchronous exponential growth

Some definitions and results about *asynchronous exponential growth* are reminded in Section 1.4.4. The main result of this section is :

Theorem 3.1.12. *Under the assumptions (3.4)-(3.5)-(3.6), the semigroup $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ generated by \mathcal{A} has asynchronous exponential growth.*

Proof. The semigroups $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ and $\{T_2(t)\}_{t \geq 0}$ are related by the Duhamel equation

$$U(t) = T_2(t) + \int_0^t T_2(t-s)B_3U(s)ds.$$

Since B_3 is a weakly compact operator then so is $T_2(t-s)B_3U(s)$ for all $s \geq 0$. It follows that the *strong* integral

$$\int_0^t T_2(t-s)B_3U(s)ds$$

is a weakly compact operator (see [109] Theorem 1 or [137] Theorem 2.2). Hence $U(t) - T_2(t)$ is a weakly compact operator and consequently (see [108] Theorem 2.10, p. 24) $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ and $\{T_2(t)\}_{t \geq 0}$ have the *same* essential type

$$\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A}) = \omega_{\text{ess}}(A + B_1 + B_2),$$

in particular

$$\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A}) \leq \omega_0(A + B_1 + B_2).$$

Note that $s(A + B_1 + B_2) = \omega_0(A + B_1 + B_2)$ and $s(\mathcal{A}) = \omega_0(\mathcal{A})$ since $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ and $\{T_2(t)\}_{t \geq 0}$ are positive semigroups on L^1 spaces (see e.g. Theorem A.4.3). Since (3.4) implies (3.10) then applying Theorem 3.1.8 and Theorem 3.1.10 we get respectively

$$\omega_0(\mathcal{A}) > -\infty \quad \text{and} \quad \omega_0(A + B_1 + B_2) = -\infty$$

so

$$\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A}) < \omega_0(\mathcal{A}).$$

By combining this last result and the irreducibility of $\{U(t)\}_{t \geq 0}$, Theorem 1.4.13 ends the proof. \square

Remark 3.1.13. Note that if (3.10) is verified but either (3.4), (3.5) or (3.6) is not true then we get the spectral gap

$$\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A}) < \omega_0(\mathcal{A}) = s(\mathcal{A})$$

but since $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ is not irreducible, we *a priori* do not have *asynchronous exponential growth*. However, as stated in Theorem 1.4.15, the semigroup has a similar behavior (1.13).

3.2 Models with unbounded sizes

In this section we consider the following model

$$\begin{cases} \partial_t u_1(t, s) + \partial_s(\gamma_1(s)u_1(t, s)) &= -\mu(s)u_1(t, s) + \int_0^\infty \beta(s, y)u_1(t, y)dy \\ &\quad -c_1(s)u_1(t, s) + c_2(s)u_2(t, s), \\ \partial_t u_2(t, s) + \partial_s(\gamma_2(s)u_2(t, s)) &= c_1(s)u_1(t, s) - c_2(s)u_2(t, s), \end{cases} \quad (3.14)$$

for $s, t \geq 0$, with the Dirichlet boundary conditions (3.2). Let

$$\mathcal{X}^\infty = (L^1(0, \infty) \times L^1(0, \infty), \|\cdot\|_{\mathcal{X}^\infty})$$

with norm

$$\|(x_1, x_2)\|_{\mathcal{X}^\infty} = \|x_1\|_{L^1(0, \infty)} + \|x_2\|_{L^1(0, \infty)}.$$

We denote by \mathcal{X}_+^∞ the nonnegative cone of \mathcal{X}^∞ . We now introduce some hypotheses on the different parameters :

1. $\mu, c_1, c_2 \in L^\infty(0, \infty), \gamma_1, \gamma_2 \in W^{1, \infty}(0, \infty)$,
2. $\beta, \mu, c_1, c_2 \geq 0$ and there exists $\gamma_0 > 0$ such $\gamma_1(s) \geq \gamma_0, \gamma_2(s) \geq \gamma_0$ a.e. $s \geq 0$,
3. the operator

$$K^\infty : L^1(0, \infty) \ni u \mapsto \int_0^\infty \beta(\cdot, y)u(y)dy \in L^1(0, \infty)$$

is weakly compact.

Remark 3.2.1. According to the general criterion of weak compactness, the third hypothesis amounts to

$$\begin{aligned} \sup_{y \in [0, \infty)} \int_0^\infty \beta(s, y)ds < \infty, \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \sup_{y \in [0, \infty)} \int_c^\infty \beta(s, y)ds = 0, \\ \lim_{|E| \rightarrow 0} \sup_{y \in [0, \infty)} \int_E \beta(s, y)ds = 0. \end{aligned}$$

Using (3.14), we define the operator \mathcal{A}^∞ by

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^\infty \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= A^\infty \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + B^\infty \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(\gamma_1 u_1)' \\ -(\gamma_2 u_2)' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(\mu + c_1)u_1 + c_2 u_2 + \int_0^\infty \beta(\cdot, y)u_1(y)dy \\ -c_2 u_2 + c_1 u_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

where the domain of A^∞ is given by

$$D(A^\infty) = \{(u_1, u_2) \in W^{1,1}(0, \infty) \times W^{1,1}(0, \infty) : u_1(0) = 0, u_2(0) = 0\}.$$

We decompose B^∞ into three operators :

$$\begin{aligned} B^\infty \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= B_1^\infty \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + B_2^\infty \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + B_3^\infty \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(\mu + c_1)u_1 \\ -c_2 u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 u_2 \\ c_1 u_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^\infty \beta(\cdot, y)u_1(y)dy \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

We are then concerned with the following Cauchy problem

$$\begin{cases} U'(t) = \mathcal{A}^\infty U(t), \\ U(0) = (u_1^0, u_2^0) \in \mathcal{X}^\infty, \end{cases}$$

where

$$U(t) = (u_1(t), u_2(t))^T.$$

3.2.1 Semigroup generation

Lemma 3.2.2. *Let $H = (h_1, h_2) \in \mathcal{X}^\infty$, $\lambda > s(A^\infty)$ and $U = (\lambda I - A^\infty)^{-1}H \in D(A^\infty)$. Let $U = (u_1, u_2)$, then for every $s \geq 0$*

$$\begin{cases} u_1(s) = \int_0^s \frac{h_1(y)}{\gamma_1(y)} \exp\left(-\int_y^s \frac{\lambda + \gamma_1'(u)}{\gamma_1(u)} du\right) dy, \\ u_2(s) = \int_0^s \frac{h_2(y)}{\gamma_2(y)} \exp\left(-\int_y^s \frac{\lambda + \gamma_2'(u)}{\gamma_2(u)} du\right) dy. \end{cases} \quad (3.15)$$

Consequently we get $\text{supp } u_1 = (\inf \text{supp } h_1, \infty)$ and $\text{supp } u_2 = (\inf \text{supp } h_2, \infty)$.

Theorem 3.2.3. *The operator \mathcal{A}^∞ generates a C_0 -semigroup $\{\mathcal{U}(t)\}_{t \geq 0}$ of bounded linear operators on \mathcal{X}^∞ .*

Proof. The fact that $D(A^\infty)$ is densely defined in \mathcal{X}^∞ is clear. Moreover, as in the finite case, the range condition

$$(\lambda I - A^\infty)U = H,$$

where $U = (u_1, u_2)$ and $H = (h_1, h_2) \in \mathcal{X}^\infty$, is verified for $\lambda > 0$ sufficiently large.

It remains to prove that there A^∞ is a dissipative operator. Let $\lambda > 0$, $U = (u_1, u_2) \in D(A^\infty)$ and $H = (\lambda I - A^\infty)U$. Let $H = (h_1, h_2)$, we have to prove that

$$\|H\|_{\mathcal{X}^\infty} \geq \lambda \|U\|_{\mathcal{X}^\infty}$$

that is

$$\|h_i\|_{L^1(0, \infty)} \geq \lambda \|u_i\|_{L^1(0, \infty)}.$$

for every $i \in \{1, 2\}$. We know that $u_i(0) = 0$ and

$$\lambda u_i(s) + (\gamma_i u_i)'(s) = h_i(s), s \in (0, \infty).$$

An integration thus leads to

$$\lambda \|u_i\|_{L^1(0, \infty)} + \int_0^\infty (\gamma_i u_i)'(s) \text{sign}(u_i(s)) ds = \int_0^\infty h_i(s) \text{sign}(u_i(s)) ds.$$

Since $u_i \in W^{1,1}(0, \infty) \hookrightarrow C([0, \infty])$, we get, for every finite $m > 0$

$$\int_0^m (\gamma_i u_i)' \text{sign}(u_i(s)) ds = \gamma_i(m) |u_i(m)|.$$

Hence

$$\int_0^\infty (\gamma_i u_i)' \text{sign}(u_i(s)) ds = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^m (\gamma_i u_i)' \text{sign}(u_i(s)) ds = 0$$

and we have

$$\lambda \|u_i\|_{L^1} = \int_0^\infty h_i(s) \text{sign}(u_i(s)) ds \leq \|h_i\|_{L^1}$$

so the dissipativity of A^∞ follows.

Finally A^∞ generates a C_0 -semigroup $\{\mathcal{T}(t)\}_{t \geq 0}$ by Lumer-Phillips Theorem then the operators $A^\infty + B_1^\infty$, $A^\infty + B_1^\infty + B_2^\infty$ and \mathcal{A}^∞ also generate a quasi-contraction C_0 -semigroup $\{\mathcal{T}_1(t)\}_{t \geq 0}$, $\{\mathcal{T}_2(t)\}_{t \geq 0}$ and $\{\mathcal{U}(t)\}_{t \geq 0}$ respectively, since B_1^∞ , B_2^∞ and B_3^∞ are bounded operators. \square

3.2.2 On irreducibility

Let make some hypotheses on the parameters. Suppose that

$$\forall \varepsilon \in (0, \infty), \quad \int_0^\varepsilon \int_\varepsilon^m \beta(s, y) dy ds > 0, \quad (3.16)$$

$$\inf \text{supp } c_1 = 0, \quad (3.17)$$

$$\sup \text{supp } c_2 = \infty. \quad (3.18)$$

Theorem 3.2.4. *The C_0 -semigroup $\{\mathcal{U}(t)\}_{t \geq 0}$ is positive. Moreover it is irreducible if and only if the assumptions (3.16)-(3.17)-(3.18) are verified.*

Proof. As in the finite case, we use Lemma 3.2.2 and we prove that the semigroups $\{\mathcal{T}(t)\}_{t \geq 0}$, $\{\mathcal{T}_1(t)\}_{t \geq 0}$, $\{\mathcal{T}_2(t)\}_{t \geq 0}$ and $\{\mathcal{U}(t)\}_{t \geq 0}$ are positive. Then under the assumptions (3.16)-(3.17)-(3.18) we show that the resolvent $(\lambda - \mathcal{A}^\infty)^{-1}$ is positivity improving for λ large enough hence the irreducibility of $\{\mathcal{U}(t)\}_{t \geq 0}$. Finally we can prove that if at least one of the three assumptions is not verified then $\{\mathcal{U}(t)\}_{t \geq 0}$ is not irreducible. \square

3.2.3 Asynchronous exponential growth

Define the weakly compact operator \overline{B}_3^∞ by

$$\overline{B}_3^\infty = \frac{B_3^\infty}{2}$$

and let

$$\overline{\mathcal{B}}^\infty = A^\infty + B_1^\infty + B_2^\infty + \overline{B}_3^\infty.$$

We can prove Theorem 3.2.3 and Theorem 3.2.4 with \overline{B}_3^∞ instead of B_3^∞ , which implies that $\overline{\mathcal{B}}^\infty$ generates a positive C_0 -semigroup $\{\mathcal{T}_3(t)\}_{t \geq 0}$ and

$$(\lambda I - \overline{\mathcal{B}}^\infty)^{-1}$$

is positivity improving for λ sufficiently large.

Theorem 3.2.5. *We assume that (3.16)-(3.17)-(3.18) are verified and*

$$\lim_{\lambda \rightarrow s(\overline{\mathcal{B}}^\infty)} r_\sigma(\overline{B}_3^\infty (\lambda - \overline{\mathcal{B}}^\infty)^{-1}) > 1 \quad (3.19)$$

then the semigroup $\{\mathcal{U}(t)\}_{t \geq 0}$ generated by A^∞ has asynchronous exponential growth.

Proof. Since $\bar{\mathcal{B}}^\infty$ is resolvent positive and $\bar{B}_3^\infty \geq 0$ then

$$\bar{B}_3^\infty(\lambda - \bar{\mathcal{B}}^\infty)^{-1} \leq \bar{B}_3^\infty(\mu - \bar{\mathcal{B}}^\infty)^{-1} \quad (\lambda > \mu)$$

and

$$\left(s(\bar{\mathcal{B}}^\infty), \infty\right) \ni \lambda \mapsto r_\sigma(\bar{B}_3^\infty(\lambda - \bar{\mathcal{B}}^\infty)^{-1}) \quad (3.20)$$

is nonincreasing. Since $\bar{B}_3^\infty(\lambda - \bar{\mathcal{B}}^\infty)^{-1}$ is weakly compact then $\left(\bar{B}_3^\infty(\lambda - \bar{\mathcal{B}}^\infty)^{-1}\right)^2$ is compact (see e.g. Theorem A.3.7). Note that

$$\left(s(\bar{\mathcal{B}}^\infty), \infty\right) \ni \lambda \mapsto r_\sigma(\bar{B}_3^\infty(\lambda - \bar{\mathcal{B}}^\infty)^{-1})$$

is convex and therefore continuous (see [108] p. 107). Assume *momentarily* that

$$r_\sigma(\bar{B}_3^\infty(\lambda - \bar{\mathcal{B}}^\infty)^{-1}) > 0 \quad (\lambda > s(\bar{\mathcal{B}}^\infty)). \quad (3.21)$$

Then

$$\left(s(\bar{\mathcal{B}}^\infty), \infty\right) \ni \lambda \mapsto r_\sigma(\bar{B}_3^\infty(\lambda - \bar{\mathcal{B}}^\infty)^{-1})$$

is *strictly decreasing* (see [108] p. 106). By Hypothesis (3.19) there exists a unique

$$\bar{\lambda} > s(\bar{\mathcal{B}}^\infty)$$

such that

$$r_\sigma(\bar{B}_3^\infty(\bar{\lambda} - \bar{\mathcal{B}}^\infty)^{-1}) = 1.$$

Since $\bar{B}_3^\infty(\bar{\lambda} - \bar{\mathcal{B}}^\infty)^{-1}$ is positive and power compact then

$$1 = r_\sigma(\bar{B}_3^\infty(\bar{\lambda} - \bar{\mathcal{B}}^\infty)^{-1})$$

is an isolated eigenvalue of $\bar{B}_3^\infty(\bar{\lambda} - \bar{\mathcal{B}}^\infty)^{-1}$ associated to a nonnegative eigenfunction U so

$$\bar{B}_3^\infty(\bar{\lambda} - \bar{\mathcal{B}}^\infty)^{-1}U = U.$$

Let

$$V := (\bar{\lambda} - \bar{\mathcal{B}}^\infty)^{-1}U.$$

Then $V \neq 0$ and

$$\bar{B}_3^\infty V = \bar{B}_3^\infty(\bar{\lambda} - \bar{\mathcal{B}}^\infty)^{-1}U = U = (\bar{\lambda} - \bar{\mathcal{B}}^\infty)V$$

so

$$\mathcal{A}^\infty V = \bar{\lambda}V.$$

As for the previous finite case, the weak compactness of \bar{B}_3^∞ implies that $\{\mathcal{U}(t)\}_{t \geq 0}$ and $\{\mathcal{T}_3(t)\}_{t \geq 0}$ have the same essential type

$$\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A}^\infty) = \omega_{\text{ess}}(\bar{\mathcal{B}}^\infty).$$

Since

$$\omega_{\text{ess}}(\bar{\mathcal{B}}^\infty) \leq s(\bar{\mathcal{B}}^\infty)$$

then

$$\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A}^\infty) \leq s(\bar{\mathcal{B}}^\infty) < \bar{\lambda} = s(\mathcal{A}^\infty).$$

Thus $\{\mathcal{U}(t)\}_{t \geq 0}$ exhibits a spectral gap and consequently $\{\mathcal{U}(t)\}_{t \geq 0}$ has asynchronous exponential growth since it is irreducible. Finally, we just have to check (3.21).

By hypotheses made on β , we know that there exists a measurable subset $I \subset \mathbb{R}_+$ with positive measure such that

$$u \in L^1(\mathbb{R}_+), u(y) > 0 \text{ a.e.} \implies \int_0^\infty \beta(s, y)u(y)dy > 0 \text{ a.e. } s \in I. \quad (3.22)$$

Now, let the operator $G \in \mathcal{L}(L^1(0, \infty))$ be such that for every $v \in L(0, \infty)$

$$\overline{B}_3^\infty (\lambda - \overline{B}^\infty)^{-1} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Gv \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

where $Gv \in L^1(0, \infty) - \{0\}$ (with Equation (3.22)). We then see that

$$\sigma(\overline{B}_3^\infty (\lambda - \overline{B}^\infty)^{-1}) = \sigma(G).$$

Indeed $\nu \in \sigma(\overline{B}_3^\infty (\lambda - \overline{B}^\infty)^{-1})$ if and only if there exists $(u_1, u_2) \in \mathcal{X}^\infty - \{0\}$ such that

$$\overline{B}_3^\infty (\lambda - \overline{B}^\infty)^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

but we know that

$$\overline{B}_3^\infty (\lambda - \overline{B}^\infty)^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$$

so we need to have

$$\nu u_2 = 0.$$

If $\nu = 0$ then we look for $(u_1, u_2) \in \mathcal{X}^\infty - \{0\}$ such that

$$\overline{B}_3^\infty (\lambda - \overline{B}^\infty)^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

which is absurd since $(\lambda - \overline{B}^\infty)^{-1}$ is positivity improving and by assumption on β . Thus $\nu \in \sigma(\overline{B}_3^\infty (\lambda - \overline{B}^\infty)^{-1})$ if and only if there exists $v \in L^1(0, \infty) - \{0\}$ such that

$$\overline{B}_3^\infty (\lambda - \overline{B}^\infty)^{-1} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$$

which is equivalent to

$$\nu \in \sigma(G).$$

Consequently

$$r_\sigma(\overline{B}_3^\infty (\lambda - \overline{B}^\infty)^{-1}) = r_\sigma(G).$$

Now define the linear operator $\overline{G} \in \mathcal{L}(L^1(0, \infty))$ by

$$\overline{G}v(s) = \chi_I(s)Gv(s)$$

where χ_I if the indicator function of I . Since

$$\overline{G} : L^1(0, \infty) \rightarrow L^1(I)$$

(using Equation (3.22)) then

$$\overline{G}_{|L^1(I)} : L^1(I) \rightarrow L^1(I)$$

and

$$G \geq \overline{G}_{|L^1(I)}$$

so

$$r_\sigma(G) \geq r_\sigma(\overline{G}_{|L^1(I)}).$$

Since $(\lambda - A^\infty)^{-1} : \mathcal{X}^\infty \rightarrow \mathcal{X}^\infty$ is positivity improving then our assumption on β imply that

$$\overline{G}_{|L^1(I)} : L^1(I) \rightarrow L^1(I)$$

is positivity improving too. Since $\overline{G}_{|L^1(I)}$ is weakly compact then $(\overline{G}_{|L^1(I)})^2$ is compact (see e.g. Theorem A.3.7) and irreducible so

$$r_\sigma(\overline{G}_{|L^1(I)}^2) > 0$$

(see Theorem A.4.7) and finally

$$r_\sigma(\overline{G}_{|L^1(I)}) > 0.$$

This shows (3.21) and ends the proof. \square

3.2.4 On the spectral bound

In this section we compute the spectral bound of some operators.

Remark 3.2.6. In all the operators considered in the following, the idea to compute their spectral bound is to let λ vary and to see when one can or cannot compute their resolvent. When there is no integral part (the operator B_3^∞ is supposed be zero), then we have to solve differential equations of order one, with homogeneous Dirichlet condition in 0. A simple application of the Cauchy-Lipschitz theorem implies that there exists a unique solution, that is locally integrable, so that it is bounded on every compact. The resolvent can then be computed if and only if the solution is globally integrable.

Simple operators

Let A_1^∞, A_2^∞ and A_μ^∞ be the positive operators defined by

$$A_i^\infty u = -(\gamma_i u)', \quad i \in \{1, 2\}, \quad A_\mu^\infty u = -(\gamma_1 u)' - \mu u$$

with $u \in D(A_1^\infty) = D(A_2^\infty) = D(A_\mu^\infty) = \{u \in W^{1,1}(0, \infty) : u(0) = 0\}$, whence

$$A^\infty = \begin{pmatrix} A_1^\infty \\ A_2^\infty \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.2.7. *The spectral bound of A^∞ is given by $s(A^\infty) = 0$.*

Proof. Let $\lambda > 0$, $i \in \{1, 2\}$, $h \in L^1(0, \infty)$ and $u = (\lambda - A_i^\infty)^{-1}h$. Necessarily we have

$$u(s) = \int_0^s \frac{h(y)}{\gamma_i(y)} \exp\left(-\int_y^s \frac{\lambda + \gamma_i'(u)}{\gamma_i(u)} du\right) dy.$$

So we get

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty |u(s)| ds \\ & \leq \int_0^\infty \int_0^s \frac{|h(y)|}{\gamma_i(y)} \exp\left(-\int_y^s \frac{\lambda + \gamma_i'(u)}{\gamma_i(u)} du\right) dy ds \\ & \leq \int_0^\infty \frac{|h(y)|}{\gamma_i(y)} \int_y^\infty \exp\left(-\int_y^s \frac{\lambda + \gamma_i'(u)}{\gamma_i(u)} du\right) ds dy \\ & \leq \frac{1}{\gamma_0} \int_0^\infty |h(y)| \int_y^\infty \exp\left(-\frac{\lambda(s-y)}{\|\gamma_i\|_{L^\infty}}\right) \exp(\ln(\gamma_i(y)) - \ln(\gamma_i(s))) ds dy \\ & \leq \frac{1}{\gamma_0} \int_0^\infty |h(y)| \exp\left(\frac{\lambda y}{\|\gamma_i\|_{L^\infty}}\right) \int_y^\infty \frac{\gamma_i(y)}{\gamma_i(s)} \exp\left(-\frac{\lambda s}{\|\gamma_i\|_{L^\infty}}\right) ds dy \\ & \leq \frac{\|\gamma_i\|_{L^\infty}}{(\gamma_0)^2} \int_0^\infty |h(y)| \exp\left(\frac{\lambda y}{\|\gamma_i\|_{L^\infty}}\right) \exp\left(-\frac{\lambda y}{\|\gamma_i\|_{L^\infty}}\right) \frac{\|\gamma_i\|_{L^\infty}}{\lambda} dy \\ & \leq \frac{(\|\gamma_i\|_{L^\infty})^2}{\lambda(\gamma_0)^2} \|h\|_{L^1} < \infty. \end{aligned}$$

Consequently $u \in L^1(0, \infty)$ and since we have

$$\lambda u + (\gamma_i u)' = h$$

then we easily see that $u' \in L^1(0, \infty)$. Finally $u \in D(A_i^\infty)$ and satisfies $(\lambda - A_i^\infty)u = h$ so we get

$$s(A_i^\infty) \leq 0.$$

Now, let $\lambda = 0$, $h \in L^1_+ - \{0\}$ and $u = (\lambda - A_i^\infty)^{-1}h$. Necessarily we have

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty |u(s)| ds \\ & = \int_0^\infty \int_0^s \frac{h(y)}{\gamma_i(y)} \exp\left(-\int_y^s \frac{\gamma_i'(u)}{\gamma_i(u)} du\right) dy ds \\ & = \int_0^\infty \frac{h(y)}{\gamma_i(y)} \int_y^\infty \exp\left(-\int_y^s \frac{\gamma_i'(u)}{\gamma_i(u)} du\right) ds dy \\ & \geq \frac{1}{\|\gamma_i\|_{L^\infty}} \int_0^\infty h(y) \int_y^\infty \exp\left(\frac{\ln(\gamma_i(y))}{\ln(\gamma_i(s))}\right) ds dy \\ & \geq \frac{1}{\|\gamma_i\|_{L^\infty}} \int_0^\infty h(y) \int_y^\infty \frac{\gamma_0}{\|\gamma_i\|_{L^\infty}} ds dy = \infty. \end{aligned}$$

Thus u is not in $L^1(0, \infty) \subset D(A_i^\infty)$ and $(\lambda - A_i^\infty)$ is not invertible so $0 \in \sigma(A_i^\infty)$ and $s(A_i^\infty) = 0$ for every $i \in \{1, 2\}$. Since we have

$$A^\infty = \begin{pmatrix} A_1^\infty \\ A_2^\infty \end{pmatrix}$$

then

$$s(A^\infty) = \max\{s(A_1^\infty), s(A_2^\infty)\} = 0.$$

□

Notation. Let f be a function, in all the following we will denote by

$$\begin{aligned} f^+ &= \limsup_{x \rightarrow \infty} f(x), & f^- &= \liminf_{x \rightarrow \infty} f(x), \\ f^{c+} &= \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(s) ds, & f^{c-} &= \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(s) ds \end{aligned}$$

respectively the limit sup and inf, then limit sup and inf of Césaro of f .

Proposition 3.2.8. The spectral bound of A_μ^∞ is bounded from below

$$s(A_\mu^\infty) \geq -\frac{(\mu/\gamma_1)^{c+}}{(1/\gamma_1)^{c-}} := -k.$$

We can note that $(1/\gamma_1)^{c-} \geq 1/\|\gamma_1\|_{L^\infty} > 0$.

Proof. Let $\varepsilon > 0$, $\lambda = -k - \varepsilon$, $h \in L_+^1(0, \infty)$ and $u := (\lambda - A_\mu^\infty)^{-1}h$. Then for every $s \geq 0$ we have

$$u(s) = \int_0^s \frac{h(y)}{\gamma_1(y)} \exp\left(-\int_y^s \left(\frac{\lambda + \mu(z) + \gamma_1'(z)}{\gamma_1(z)}\right) dz\right) dy$$

so

$$\int_0^\infty |u(s)| ds = \int_0^\infty \frac{h(y)}{\gamma_1(y)} \int_y^\infty \exp\left(-\int_y^s \left(\frac{-(k + \varepsilon) + \mu(z) + \gamma_1'(z)}{\gamma_1(z)}\right) dz\right) ds dy.$$

Hence we get

$$\begin{aligned} & \int_y^s \left(\frac{-(k + \varepsilon) + \mu(z) + \gamma_1'(z)}{\gamma_1(z)}\right) dz \\ &= \int_0^s \frac{\mu(z) - (k + \varepsilon)}{\gamma_1(z)} dz + \int_0^y \frac{k + \varepsilon - \mu(z)}{\gamma_1(z)} dz + \ln\left(\frac{\gamma_1(s)}{\gamma_1(y)}\right) \\ &\leq \int_0^s \frac{\mu(z) - (k + \varepsilon)}{\gamma_1(z)} dz + C_1 y + C_2, \end{aligned}$$

where

$$C_1 = \frac{(k + \varepsilon)}{\gamma_0}, \quad C_2 = \ln\left(\frac{\|\gamma_1\|_{L^\infty}}{\gamma_0}\right).$$

Consequently we get

$$\int_0^\infty |u(s)| ds \geq \int_0^\infty \frac{h(y)}{\gamma_1(y)} \int_y^\infty e^{-\int_0^s [(\mu(z) - (k + \varepsilon))/\gamma_1(z)] dz} e^{-C_1 y - C_2} ds dy.$$

Since $h \neq 0$ there exists $\bar{y} > 0$ such that

$$\int_0^{\bar{y}} h(z) dz > 0.$$

Moreover for every $\eta > 0$, there exists $\bar{s} > \bar{y}$ such that for every $s \geq \bar{s}$ we have

$$\frac{1}{s} \int_0^s \frac{\mu(z)}{\gamma_1(z)} dz < (\mu/\gamma_1)^{c^+} + \frac{\varepsilon(1/\gamma_1)^{c^-}}{2}$$

and

$$\frac{1}{s} \int_0^s \frac{1}{\gamma_1(z)} dz \geq (1/\gamma_1)^{c^-} - \eta$$

Consequently we obtain

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |u(s)| ds &\geq \int_0^{\bar{y}} \frac{h(y)}{\|\gamma_1\|_{L^\infty}} \int_{\bar{s}}^\infty e^{-(\mu/\gamma_1)^{c^+} - \varepsilon(1/\gamma_1)^{c^-}/2} e^{\varepsilon(k+\varepsilon)[(1/\gamma_1)^{c^-} - \eta]} e^{-C_1\bar{y} - C_2} ds dy \\ &\geq \frac{e^{-C_1\bar{y} - C_2}}{\|\gamma_1\|_{L^\infty}} \int_0^{\bar{y}} h(y) dy \int_{\bar{s}}^\infty e^{\varepsilon(1/\gamma_1)^{c^-}/2} e^{-\eta(k+\varepsilon)} = \infty \end{aligned}$$

by choosing $\eta > 0$ small enough. Thus $u \notin L^1(0, \infty)$ so $\lambda \in \sigma(A_\mu^\infty)$ for every $\varepsilon > 0$ and

$$s(A_\mu^\infty) \geq -k.$$

□

Proposition 3.2.9. *We have*

$$-\mu^- \geq s(A_\mu^\infty) \geq -\mu^+.$$

Thus the spectral bound is exactly the limit of μ if the latter exists.

Proof. Let $\varepsilon > 0$, $\lambda = -\mu^- + \varepsilon$, $h \in L^1(0, \infty)$ and $u := (\lambda - A_\mu^\infty)^{-1}h$. Necessarily we get

$$u(s) = \int_0^s \frac{h(y)}{\gamma_1(y)} \exp\left(-\int_y^s \frac{\lambda + \gamma_1'(u) + \mu(u)}{\gamma_1(u)}\right) dy$$

then

$$\int_0^\infty |u(s)| ds \leq \frac{\|\gamma_1\|_{L^\infty}}{\gamma_0} \int_0^\infty \frac{|h(y)|}{\gamma_0} \int_y^\infty \exp\left(-\int_y^s \frac{-\mu^- + \varepsilon + \mu(u)}{\gamma_1(u)}\right) ds dy.$$

We know that there exists $\eta > 0$ such that for every $y \geq \eta$ we have $\mu(y) \geq \mu^- - \varepsilon/2$. First we get

$$\begin{aligned} &\int_\eta^\infty \frac{|h(y)|}{\gamma_0} \int_y^\infty \exp\left(-\int_y^s \frac{-\mu^- + \varepsilon + \mu(u)}{\gamma_1(u)}\right) ds dy \\ &\leq \int_\eta^\infty \frac{|h(y)|}{\gamma_0} \int_y^\infty \exp\left(-\int_y^s \frac{\varepsilon/2}{\|\gamma_1\|_{L^\infty}}\right) ds dy \\ &\leq \int_\eta^\infty \frac{|h(y)|}{\gamma_0} \int_y^\infty \exp\left(-\frac{\varepsilon(s-y)}{2\|\gamma_1\|_{L^\infty}}\right) ds dy \\ &\leq \frac{2\gamma_0\|\gamma_1\|_{L^\infty}}{\varepsilon} \int_\eta^\infty |h(y)| dy < \infty. \end{aligned}$$

Moreover, for every $y \in [0, \eta]$ we have

$$\begin{aligned}
 & \int_y^\infty \exp\left(-\int_y^s \frac{-\mu^- + \varepsilon + \mu(u)}{\gamma_1(u)} ds\right) ds \\
 & \leq \exp\left(\int_0^y \frac{|-\mu^- + \varepsilon + \mu(u)|}{\gamma_1(u)} du\right) \int_y^\infty \exp\left(-\int_0^s \frac{-\mu^- + \varepsilon + \mu(u)}{\gamma_1(u)} du\right) ds \\
 & \leq C_1 \int_\eta^\infty C_2 \exp\left(-\int_\eta^s \frac{\varepsilon/2}{\gamma_1(u)} du\right) ds + C_3 \\
 & \leq C_1 \int_\eta^\infty C_2 \exp\left(-\int_\eta^s \frac{\varepsilon/2}{\gamma_1(u)} du\right) ds + C_3 \\
 & \leq C_1 C_2 \exp\left(\frac{\eta}{\gamma_0}\right) \int_\eta^\infty \exp\left(\frac{\eta\varepsilon}{2\gamma_0}\right) \exp\left(-\frac{\varepsilon s}{2}\right) ds + C_3 \\
 & \leq C_1 C_2 \exp\left(\frac{\eta}{\gamma_0}\right) \exp\left(\frac{\eta\varepsilon}{2\gamma_0}\right) \frac{2}{\varepsilon} + C_3 < \infty
 \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \exp\left(\frac{\eta(|\varepsilon - \mu^-| + \|\mu\|_{L^\infty})}{\gamma_0}\right) \\
 C_2 &= \exp\left(-\int_0^\eta \frac{-\mu^- + \varepsilon + \mu(u)}{\gamma_1(u)} du\right) < \infty
 \end{aligned}$$

and

$$C_3 = \exp\left(\frac{\eta(|\varepsilon - \mu^-| + \|\mu\|_{L^\infty})}{\gamma_0}\right) \int_0^\eta \exp\left(-\int_0^s \frac{-\mu^- + \varepsilon + \mu(u)}{\gamma_1(u)} du\right) ds < \infty.$$

Consequently we have

$$\int_0^\infty |u(s)| ds < \infty$$

so $u \in L^1(0, \infty)$ and $\lambda \in \rho(A_\mu^\infty)$ for every $\varepsilon > 0$ whence

$$s(A_\mu^\infty) \leq -\mu^-.$$

Now let $\varepsilon > 0$, $\lambda = -\mu^+ - \varepsilon$, $h \in L_+^1(0, \infty)$ and $u := (\lambda - A_\mu^\infty)^{-1}h$. We know that

$$u(s) = \int_0^s \frac{h(y)}{\gamma_1(y)} \exp\left(-\int_y^s \frac{\lambda + \gamma_1'(u) + \mu(u)}{\gamma_1(u)} dy\right) dy.$$

As in the proof of Proposition 3.2.8, there exists $\bar{y} > 0$ and $\bar{s} > \bar{y}$ such that

$$\int_0^{\bar{y}} h(z) dz > 0$$

and for every $s \geq \bar{s}$, $\mu(s) \leq -\mu^+ + \varepsilon/2$. Consequently we get

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty |u(s)| ds &\geq \int_0^{\bar{y}} \frac{h(y)}{\gamma_1(y)} \int_{\bar{s}}^\infty e^{-\int_{\bar{s}}^s [(\mu(z) - (\mu^+ + \varepsilon))/\gamma_1(z)] dz} e^{-C_4 y} C_5 ds dy, \\
 &\geq e^{-\varepsilon \bar{s}/(2\|\gamma_1\|_{L^\infty})} e^{-C_4 \bar{y}} C_5 \int_0^{\bar{y}} \frac{h(y)}{\|\gamma_1\|_{L^\infty}} \int_{\bar{s}}^\infty e^{\varepsilon s/(2\|\gamma_1\|_{L^\infty})} ds dy = \infty
 \end{aligned}$$

where

$$C_4 = \frac{\|\mu\|_{L^\infty} + \mu^+ + \varepsilon}{\|\gamma_1\|_{L^\infty}}, \quad C_5 = \frac{\gamma_0}{\|\gamma_1\|_{L^\infty}} \exp(-\bar{s}(\|\mu\|_{L^\infty} + \mu^+ \varepsilon)/\gamma_0)$$

so $u \notin L^1(0, \infty)$ and $\lambda \in \sigma(A_\mu^\infty)$ for every $\varepsilon > 0$ whence

$$s(A_\mu^\infty) \geq -\mu^+.$$

□

Coupled operators

Define the positive operators

$$\tilde{A}_1^\infty u = -(\gamma_1 u)' - (\mu + c_1)u, \quad \tilde{A}_2^\infty u = -(\gamma_2 u)' - c_2 u, \quad \mathcal{B}^\infty = A^\infty + B_1^\infty + B_2^\infty$$

with $D(\tilde{A}_1^\infty) = D(\tilde{A}_2^\infty) = D(A_1^\infty)$ and $D(\mathcal{B}^\infty) = D(A^\infty)$.

Theorem 3.2.10. *We have*

$$\max\{-\mu^+, s(\tilde{A}_2^\infty)\} \leq s(\mathcal{B}^\infty) \leq 0.$$

Moreover, if $\mu^- > 0$ and $s(\tilde{A}_2^\infty) < 0$ then

$$s(\mathcal{B}^\infty) < 0.$$

Proof. Since B_2^∞ is a positive operator then we have

$$s(\mathcal{B}^\infty) \geq s(A^\infty + B_1^\infty) = \max\{s(\tilde{A}_1^\infty), s(\tilde{A}_2^\infty)\}.$$

Let $\lambda > 0$ and $(h_1, h_2) \in L^1(0, \infty) \times L^1(0, \infty)$ then denote by $(u_1, u_2) := (\lambda - \mathcal{B}^\infty)^{-1}(h_1, h_2)$. Necessarily we have

$$\begin{cases} (\gamma_1 u_1)' + (\lambda + c_1 + \mu)u_1 - c_2 u_2 = h_1, \\ (\gamma_2 u_2)' + (\lambda + c_2)u_2 - c_1 u_1 = h_2. \end{cases} \quad (3.24)$$

Doing the sum we get

$$(\gamma_1 u_1)' + (\gamma_2 u_2)' + \lambda(u_1 + u_2) + \mu u_1 = h_1 + h_2 =: h. \quad (3.25)$$

We know that \mathcal{B}^∞ is a positive linear operator so it suffices to take $(h_1, h_2) \in \mathcal{X}_+^\infty$. Then u_1, u_2 are nonnegative functions and an integration of the latter equation with some lower bounds gives

$$\lambda \int_0^\infty (u_1(s) + u_2(s)) ds \leq \|h\|_{L^1} < \infty$$

whence

$$u_1 + u_2 \in L^1(0, \infty)$$

so $u_1 \in L^1(0, \infty)$ and $u_2 \in L^1(0, \infty)$. Thus $\lambda \in \rho(\mathcal{B}^\infty)$ for every $\lambda > 0$ and

$$s(\mathcal{B}^\infty) \leq 0.$$

Now let $\lambda = -\mu^+ - \varepsilon$, with $\varepsilon > 0$. We know that there exists $\eta > 0$ such that for every $x \geq \eta$ we have

$$\mu(x) \leq \mu^+ + \varepsilon/2$$

so that $\lambda + \mu(x) \leq -\varepsilon/2 < 0$. Suppose that $(u_1, u_2) \in W^{1,1}(0, \infty) \times W^{1,1}(0, \infty)$ then an integration of (3.25) between η and ∞ implies that

$$0 \geq -\gamma_1(\eta)u_1(\eta) - \gamma_2(\eta)u_2(\eta) + \int_{\eta}^{\infty} (\lambda + \mu(s))(u_1(s) + u_2(s))ds \geq \int_{\eta}^{\infty} h(u)du.$$

Taking $h \in L^1(0, \infty)$ such that $\int_{\eta}^{\infty} h(s)ds > 0$ would lead to a contradiction. Thus for every $\varepsilon > 0$, we have $\lambda \in \sigma(\mathcal{B}^{\infty})$ and

$$s(\mathcal{B}^{\infty}) \geq -\mu^+.$$

Finally, we suppose that $\mu^- > 0$ so that there exists $\varepsilon > 0$ and $\eta > 0$ such that for every $x \geq \eta$, we have $\mu(x) \geq \varepsilon/2 > 0$. Let $\lambda = 0$, so an integration of (3.25) between 0 and ∞ then some lower bounds lead to

$$\int_0^{\infty} \mu(s)u_1(s)ds \leq \|h\|_{L^1} < \infty.$$

so

$$\int_{\eta}^{\infty} u_1(s)ds < \infty$$

and obviously $u_1 \in L^1(0, \infty)$. The second equation of (3.24) implies that

$$(\lambda - \tilde{A}_2^{\infty})u_2 = h_2 + c_1u_1 \in L^1(0, \infty).$$

Since $s(\tilde{A}_2^{\infty}) < 0$ and $\lambda = 0 \in \rho(\tilde{A}_2^{\infty})$ then $u_2 \in D(\tilde{A}_2^{\infty})$. Moreover we can prove that $u_1 \in D(\tilde{A}_1^{\infty})$ whence

$$0 \in \rho(\mathcal{B}^{\infty}).$$

□

Remark 3.2.11. The latter theorem gives a framing of the spectral bound of \mathcal{B}^{∞} . The condition $s(\tilde{A}_2^{\infty}) < 0$ is satisfied for example as soon as $c_2^- > 0$. In a particular case, we can be more precise at stated in the following result.

Theorem 3.2.12. *Suppose that the limits*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mu(x) = l_{\mu} > 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} c_1(x) = l_1 > 0$$

exist and are finite then suppose that $c_2 \in \mathbb{R}_+^$. Define the second order polynomial function*

$$P : \lambda \mapsto \lambda^2 + \lambda(l_1 + c_2 + l_{\mu}) + l_{\mu}c_2$$

whose discriminant is

$$\Delta = l_1^2 + 2l_1c_2 + 2l_{\mu}l_1 + (c_2 - l_{\mu})^2 > 0$$

and let λ^ be the largest root of P :*

$$\lambda^* = \frac{-(l_1 + c_2 + l_{\mu}) + \sqrt{(l_1 + c_2 + l_{\mu})^2 - 4l_{\mu}c_2}}{2} < 0$$

then

$$s(\mathcal{B}^{\infty}) = \lambda^*.$$

Proof. We know by Theorem 3.2.10 that $s(\mathcal{B}^\infty) < 0$. So let $\varepsilon > 0$ and $\lambda = \lambda^* + \varepsilon$ such that $\lambda < 0$ then let $(h_1, h_2) \in L^1(0, \infty) \times L^1(0, \infty)$, $(u_1, u_2) := (\lambda - \mathcal{B}^\infty)^{-1}(h_1, h_2)$. Thus we get (3.24) to solve. We multiply the first equation by $(\lambda + c_2)$ and the second one by c_2 then we do the sum of both equations to obtain

$$(\lambda + c_2)(\gamma_1 u_1)' + c_2(\gamma_2 u_2)' + [\lambda^2 + \lambda(c_1 + c_2 + \mu) + \mu c_2]u_1 = (\lambda + c_2)h_1 + c_2 h_2 =: h, \quad (3.26)$$

where $h \in L^1(0, \infty)$. We see that $P(-c_2) = -l_1 c_2 < 0$ and $P(-l_\mu) = -l_1 l_\mu < 0$ so $\lambda^* > -c_2$ and $\lambda^* > -l_\mu$. By assumption made on c_1 and μ we know that for every $\eta > 0$, there exists $\delta > 0$ such that for every $s \geq \delta$ we have

$$|\mu(s) - l_\mu| \leq \eta, \quad |c_1(s) - l_1| \leq \eta.$$

Moreover for every $s \geq \delta$, we get

$$\begin{aligned} & \lambda^2 + \lambda(c_1(s) + c_2(s) + \mu(s)) + \mu(s)c_2(s) \\ & \geq (\lambda^* + \varepsilon)^2 + (\lambda^* + \varepsilon)(l_1 + c_2 + l_\mu + 2\eta) + (l_\mu - \eta)(c_2 - \eta) \\ & \geq \varepsilon^2 + 2\varepsilon\lambda^* + 2\eta\lambda^* + \varepsilon(l_1 + c_2 + l_\mu + 2\eta) - \eta(l_\mu + c_2) + \eta^2 \\ & \geq \varepsilon[2\lambda^* + (l_1 + c_2 + l_\mu)] + \varepsilon^2 + 2\lambda^*\eta + 2\varepsilon\eta + \eta^2 - \eta(l_\mu + c_2) \\ & \geq \varepsilon^2 + 2\lambda^*\eta + 2\varepsilon\eta + \eta^2 - \eta(l_\mu + c_2) := C(\eta) \end{aligned}$$

since

$$2\lambda^* \geq -(l_1 + c_2 + l_\mu).$$

We see that $C(0) = \varepsilon^2 > 0$ and since C is a continuous function then we can find $\eta^* > 0$ small enough such that $C(\eta^*) > 0$. Thus there exists $\delta > 0$ such that for every $s \geq \delta$, we get

$$\lambda^2 + \lambda(c_1(s) + c_2(s) + \mu(s)) + \mu(s)c_2(s) \geq C(\eta^*) > 0$$

and an integration of (3.26) between δ and ∞ leads to

$$(\lambda + c_2) \int_\delta^\infty (\gamma_1 u_1)'(s) + c_2 \int_\delta^\infty (\gamma_2 u_2)'(s) + C(\eta^*) \int_\delta^\infty u_1(s) ds \leq \|h\|_{L^1(0, \infty)} < \infty$$

so that

$$C(\eta^*) \int_\delta^\infty u_1(s) ds \leq \|h\|_{L^1(0, \infty)} + (\lambda + c_2)\gamma_1(\delta)u_1(\delta) + c_2\gamma_2(\delta)u_2(\delta) < \infty.$$

Finally $u_1 \in L^1(0, \infty)$ so, using the second equation of (3.24) we get $u_2 \in L^1(0, \infty)$ and then $\lambda \in \rho(\mathcal{B}^\infty)$ for every $\varepsilon > 0$ so that

$$s(\mathcal{B}^\infty) \leq \lambda^*.$$

Now let that $\lambda = \lambda^* - \varepsilon < 0$, with $\varepsilon > 0$ small enough such that $\lambda > -c_2$ (which is possible since $\lambda^* > -c_2$), then suppose that $\lambda \in \rho(\mathcal{B}^\infty)$. Once again we get (3.26) to solve and by assumption on the parameters we use the following upper bound

$$\begin{aligned} & \lambda^2 + \lambda(c_1(s) + c_2(s) + \mu(s)) + \mu(s)c_2(s) \\ & \leq (\lambda^* - \varepsilon)^2 + (\lambda^* - \varepsilon)(l_1 + c_2 + l_\mu - 2\eta) + (l_\mu + \eta)(c_2 + \eta) \\ & \leq \varepsilon^2 - 2\varepsilon\lambda^* - 2\eta\lambda^* - \varepsilon(l_1 + c_2 + l_\mu - 2\eta) + \eta(l_\mu + c_2) + \eta^2 \\ & \leq \varepsilon^2 - \varepsilon[2\lambda^* + (l_1 + c_2 + l_\mu)] - 2\lambda^*\eta + 2\varepsilon\eta + \eta^2 + \eta(l_\mu + c_2) \\ & \leq \varepsilon^2 - \varepsilon(l_1 - 2\eta) - 2\lambda^*\eta + \eta^2 + \eta(l_\mu + c_2) := \tilde{C}(\eta) \end{aligned}$$

since

$$2\lambda^* + (l_1 + c_2 + l_\mu) \geq \sqrt{\Delta} \geq l_1.$$

Suppose that $\varepsilon \leq l_1/2$, then

$$\tilde{C}(0) = \varepsilon(\varepsilon - l_1) < 0$$

so by continuity of \tilde{C} , we can find η^* small enough such that $\tilde{C}(\eta^*) < 0$. Thus there exists $\delta > 0$ such that for every $s \geq \delta$, we get

$$\lambda^2 + \lambda(c_1(s) + c_2(s) + \mu(s)) + \mu(s)c_2(s) \leq \tilde{C}(\eta^*) < 0$$

and an integration of (3.26) between δ and ∞ leads to

$$(\lambda + c_2) \int_\delta^\infty (\gamma_1 u_1)'(s) + c_2 \int_\delta^\infty (\gamma_2 u_2)'(s) + \tilde{C}(\eta^*) \int_\delta^\infty u_1(s) ds \geq \int_\delta^\infty h(s) ds$$

so that

$$0 \geq \int_\delta^\infty h(y) dy.$$

We choose h such that $\int_\delta^\infty h(y) dy > 0$ to get a contradiction. Thus u_1 or u_2 is not in $L^1(0, \infty)$ which proves that $\lambda \in \sigma(\mathcal{B}^\infty)$ for every $\varepsilon > 0$ small enough, whence

$$s(\mathcal{B}^\infty) \geq \lambda^*$$

and the equality follows. \square

Remark 3.2.13. If $l_\mu = 0$ or $c_2 = 0$ we see that $s(\mathcal{B}^\infty) = 0$, as with Theorem 3.2.10. The case where $l_1 = 0$ leads to

$$s(\mathcal{B}^\infty) = \max\{-l_\mu, -c_2\}$$

which is natural since \mathcal{B}^∞ is not a coupled operator in this case. The latter theorem provides an exact computation of the spectral bound of some coupled operator. Suppose for one moment that c_1, c_2, μ are nonnegative constants and consider the matrix

$$M = \begin{pmatrix} -\mu - c_1 & c_2 \\ c_1 & -c_2 \end{pmatrix}.$$

We can readily see that $s(M) = \lambda^*$ ($l_1 = c_1$ and $l_\mu = \mu$). Considering this spectral bound as a function of c_1 , we can apply [72, Theorem 1. (c)] and verify that it is a strictly increasing function from $\max\{-\mu, -c_2\}$ to 0. Similarly if λ^* is seen as a function of c_2 then by applying [72, Theorem 1. (a)], we verify that the function is strictly decreasing from 0 to $-\mu$.

3.2.5 On the spectral gap

One can easily see that a spectral gap can only appear if K^∞ is a non identically zero operator, since there would be in that case no compact part. However, as we shall see in this section, it is not sufficient. We give indeed some examples for which there is, or there is not, a spectral gap.

Conservative systems

Theorem 3.2.14. *Suppose that for every $y \geq 0$ we have*

$$\int_0^\infty \beta(s, y) ds \geq \mu(y)$$

and

$$\mu^- > 0, \quad c_2^- > 0.$$

Then $s(\mathcal{A}^\infty) \geq 0$ and $s(\mathcal{B}^\infty) < 0$.

Proof. The fact that $s(\mathcal{B}^\infty) < 0$ follows directly from Theorem 3.2.10. To prove that $s(\mathcal{A}^\infty) \geq 0$, we integrate both equations of (3.14) between 0 and ∞ to get for every $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_0^\infty u_1(t, s) ds \right] &= - \int_0^\infty (\mu(s) + c_1(s)) u_1(t, s) ds + \int_0^\infty c_2(s) u_2(t, s) ds \\ &\quad + \int_0^\infty \int_0^\infty \beta(s, y) u_1(t, y) dy ds \\ \frac{d}{dt} \left[\int_0^\infty u_2(t, s) ds \right] &= - \int_0^\infty c_2(s) u_2(t, s) ds + \int_0^\infty c_1(s) u_1(t, s) ds \end{aligned}$$

and the sum of the latter equations leads to

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_0^\infty (u_1(t, s) + u_2(t, s)) ds \right] &= \int_0^\infty \int_0^\infty \beta(s, y) u_1(t, y) dy ds - \int_0^\infty \mu(s) u_1(t, s) ds \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \beta(s, y) ds - \mu(y) \right] u_1(t, y) dy \geq 0 \end{aligned}$$

by assumption. We thus get a sur-conservative system so that

$$s(\mathcal{A}^\infty) \geq 0.$$

□

Theorem 3.2.15. *Suppose that*

$$c_2^{c+} = 0$$

and for every $y \geq 0$ we have

$$\int_0^\infty \beta(s, y) ds \leq \mu(y).$$

Then $s(\mathcal{B}^\infty) = 0$ and $s(\mathcal{A}^\infty) = 0$.

Proof. Since $c_2 \geq 0$, it follows from Proposition 3.2.7 that $s(\tilde{A}_2^\infty) \leq 0$. Since $c_2^{c+} = 0$ then

$$(c_2/\gamma_1)^{c+} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{c_2(s)}{\gamma_0} ds = 0$$

and using Proposition 3.2.8 (with c_2 instead of μ) we get

$$s(\tilde{A}_2^\infty) = 0.$$

The fact that $s(\mathcal{B}^\infty) = 0$ follows from Theorem 3.2.10. Since B_2^∞ is a positive operator then

$$s(\mathcal{A}^\infty) \geq s(A^\infty + B_1^\infty + B_3^\infty)$$

that is exactly

$$s(\mathcal{A}^\infty) \geq \max\{s(\tilde{A}_1^\infty + K^\infty), s(\tilde{A}_2^\infty)\} \geq 0.$$

We then proceed as in the proof of Theorem 3.2.14, to get

$$\frac{d}{dt} \left[\int_0^\infty (u_1(t, s) + u_2(t, s)) ds \right] = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \beta(s, y) ds - \mu(y) \right] u_1(t, y) dy \leq 0.$$

We thus get a under-conservative system so that

$$s(\mathcal{A}^\infty) \leq 0.$$

Hence

$$s(\mathcal{A}^\infty) = 0 = s(\mathcal{B}^\infty).$$

□

Other examples

Define the operator

$$\begin{aligned} A_K^\infty u &= A_\mu^\infty u + \int_0^\infty \beta(\cdot, y) u(y) dy \\ &= -(\gamma_1 u)' - \mu u + \int_0^\infty \beta(\cdot, y) u(y) dy. \end{aligned}$$

In all the following, let

$$\beta_1(s) = \inf_{y \geq 0} \int_0^\infty \beta(s, y) dy$$

so that for every $s, y \geq 0$ we have

$$\beta(s, y) \geq \beta_1(s).$$

Theorem 3.2.16. *Suppose that K^∞ is large in the following sense : there exists $\varepsilon > 0$ such that $\beta_1 \in L^1(0, \infty)$ verifies*

$$\int_0^\infty \beta_1(s) ds \geq \|\mu\|_{L^\infty} + \|c_1\|_{L^\infty} + \varepsilon.$$

Then $s(\mathcal{B}^\infty) \leq 0$ and $s(\mathcal{A}^\infty) > 0$.

Proof. The fact that

$$s(\mathcal{B}^\infty) \leq 0$$

follows from Theorem 3.2.10. Since B_2^∞ is a positive operator then

$$s(\mathcal{A}^\infty) \geq \max\{s(\tilde{A}_1^\infty + K^\infty), s(\tilde{A}_2^\infty)\}.$$

Let denote by \tilde{A}_K^∞ the operator defined by

$$\begin{aligned} \tilde{A}_K^\infty u &= \tilde{A}_1^\infty u + K^\infty u \\ &= -(\gamma_1 u)' - (\mu + c_1)u + \int_0^\infty \beta(\cdot, y) u(y) dy. \end{aligned}$$

Then it remains to prove that

$$s(\tilde{A}_K^\infty) > 0.$$

Let $\lambda = \varepsilon$ and suppose that $\lambda \in \rho(\tilde{A}_K^\infty)$. Let $h \in L^1_+(0, \infty)$ and denote by $u := (\lambda - \tilde{A}_K^\infty)^{-1}h$. Necessarily we get

$$(\gamma_1 u)' + (\lambda + \mu + c_1)u - \int_0^\infty \beta(\cdot, y)u(y)dy = h$$

and an integration leads to

$$\int_0^\infty (\lambda + \mu(s) + c_1(s))u(s)ds = \int_0^\infty \int_0^\infty \beta(s, y)u(y)dyds + \int_0^\infty h(y)dy.$$

Thus we get

$$\int_0^\infty (\varepsilon + \mu(s) + c_1(s))u(s)ds \geq \int_0^\infty \beta_1(s)ds \int_0^\infty u(y)dy + \int_0^\infty h(y)dy$$

and by assumption we get

$$0 \geq \left[\varepsilon + \|\mu\|_{L^\infty} + \|c_1\|_{L^\infty} - \int_0^\infty \beta_1(s)ds \right] \int_0^\infty u(s)ds \geq \int_0^\infty h(y)dy > 0$$

which is absurd. Consequently $\lambda = \varepsilon \in \sigma(\tilde{A}_K^\infty)$ and we have

$$s(\tilde{A}_K^\infty) \geq \varepsilon > 0$$

whence $s(\mathcal{A}^\infty) > 0$. □

In the constant case, we can even get a spectral gap with a weaker assumption on K^∞ .

Theorem 3.2.17. *Let c_1, c_2, μ be positive constants and suppose that*

$$\int_0^\infty \beta_1(s)ds > 0.$$

Then $s(\mathcal{A}^\infty) > s(\mathcal{B}^\infty)$.

Proof. The computation of $s(\mathcal{B}^\infty)$ follows from Theorem 3.2.12 :

$$s(\mathcal{B}^\infty) := \lambda^* = \frac{-(c_1 + c_2 + \mu) + \sqrt{(c_1 + c_2 + \mu)^2 - 4\mu c_2}}{2}.$$

Let $\varepsilon > 0$, $\lambda = \lambda^* + \varepsilon$ then suppose that $\lambda \in \rho(\mathcal{A}^\infty)$. Let $(h_1, h_2) \in L^1(0, \infty) \times L^1(0, \infty)$ and $(u_1, u_2) := (\lambda - \mathcal{A}^\infty)^{-1}(h_1, h_2)$. Necessarily we have

$$\begin{cases} (\gamma_1 u_1)' + (\lambda + c_1 + \mu)u_1 - c_2 u_2 - \int_0^\infty \beta(\cdot, y)u_1(y)dy = h_1, \\ (\gamma_2 u_2)' + (\lambda + c_2)u_2 - c_1 u_1 = h_2. \end{cases} \quad (3.27)$$

and as in the proof of Theorem 3.2.12, we get

$$(\lambda + c_2)(\gamma_1 u_1)' + c_2(\gamma_2 u_2)' + [\lambda^2 + \lambda(c_1 + c_2 + \mu) + \mu c_2]u_1 - \int_0^\infty \beta(\cdot, y)u_1(y)dy = h,$$

where $h = (\lambda + c_2)h_1 + c_2h_2$. An integration of the latter equation between 0 and ∞ leads to

$$[\lambda^2 + \lambda(c_1 + c_2 + \mu) + \mu c_2] \int_0^\infty u_1(y)dy = \int_0^\infty h(y)dy + (\lambda + c_2) \int_0^\infty \int_0^\infty \beta(s, y)u_1(y)dyds \quad (3.28)$$

and replacing λ by its expression, we obtain

$$[\varepsilon^2 + \varepsilon(2\lambda^* + c_1 + c_2 + \mu)] \int_0^\infty u_1(y)dy = \int_0^\infty h(y)dy + (\lambda^* + \varepsilon + c_2) \int_0^\infty \int_0^\infty \beta(s, y)u_1(y)dyds$$

so that

$$[\varepsilon^2 + \varepsilon(2\lambda^* + c_1 + c_2 + \mu)] \int_0^\infty u_1(y)dy \geq (\lambda^* + \varepsilon + c_2) \int_0^\infty \beta_1(s)ds \int_0^\infty u_1(y)dy$$

Define the function

$$f : \varepsilon \mapsto [\varepsilon^2 + \varepsilon(2\lambda^* + c_1 + c_2 + \mu)] - (\lambda^* + \varepsilon + c_2) \int_0^\infty \beta_1(s)ds.$$

Since $f(0) = -(\lambda^* + c_2) \int_0^\infty \beta_1(s)ds < 0$ and $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} f(\varepsilon) = \infty$ then by continuity there exists $\bar{\varepsilon} > 0$ such that $f(\bar{\varepsilon}) = 0$. Considering $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ in (3.28) would lead to

$$0 \geq f(\varepsilon) \int_0^\infty u_1(y)dy = \int_0^\infty h(y)dy > 0$$

hence the contradiction and the fact that

$$s(\mathcal{A}^\infty) \geq \lambda^* + \bar{\varepsilon} > \lambda^* = s(\mathcal{B}^\infty).$$

□

Remark 3.2.18. In the end we showed some concrete examples where there is a *spectral gap*. Consequently the semigroup exhibits the *asynchronous exponential growth* behavior when the irreducibility conditions (3.16)-(3.17)-(3.18) are verified. Finally a case where there is *no* spectral gap (and consequently no asynchronous behavior of the semigroup) is shown. As in the finite case, the behavior of the semigroup when there is spectral gap but no irreducibility is as open problem.

Deuxième partie

Étude d'équation de transport avec diffusion

Chapitre 4

Time asymptotics of structured populations with diffusion and dynamic boundary conditions

4.1 Models with bounded sizes

In this Section we consider the equation

$$\partial_t u(t, s) + \partial_s(\gamma(s)u(t, s)) = \partial_s(d(s)\partial_s u(t, s)) - \mu(s)u(t, s) + \int_0^m \beta(s, y)u(t, y)dy \quad (4.1)$$

for every $s \in [0, m]$ and $t \geq 0$, with generalized Feller boundary conditions

$$[\partial_s(d(s)\partial_s u(t, s))]_{s=0} - b_0\partial_s u(t, 0) + c_0u(t, 0) = 0, \quad (4.2)$$

$$[\partial_s(d(s)\partial_s u(t, s))]_{s=m} + b_m\partial_s u(t, m) + c_mu(t, m) = 0 \quad (4.3)$$

and

$$b_0 - \gamma(0) > 0, \quad b_m + \gamma(m) > 0. \quad (4.4)$$

4.1.1 Framework and hypotheses

In order to analyze the problem described by (4.1)-(4.2)-(4.3), following [51] we rewrite the boundary conditions (4.2)-(4.3). We substitute the diffusion term in (4.2)-(4.3), by the remainder of (4.1) evaluated in 0 and m respectively. We thus get the following dynamic equations

$$\partial_t u(t, 0) = -u(t, 0)\rho_0 + \partial_s u(t, 0)(b_0 - \gamma(0)) + \int_0^m \beta_0(y)u(t, y)dy, \quad (4.5)$$

$$\partial_t u(t, m) = -u(t, m)\rho_m - \partial_s u(t, m)(b_m + \gamma(m)) + \int_0^m \beta_m(y)u(t, y)dy, \quad (4.6)$$

where

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \gamma'(0) + \mu(0) + c_0, \\ \rho_m &= \gamma'(m) + \mu(m) + c_m \end{aligned}$$

and

$$\beta_0 = \beta(0, \cdot), \quad \beta_m = \beta(m, \cdot).$$

Following [51], the Banach space

$$\mathcal{X} = (L^1(0, m) \times \mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$$

is endowed with the norm

$$\|(x, x_0, x_m)\|_{\mathcal{X}} = \|x\|_{L^1(0, m)} + c_1|x_0| + c_2|x_m|,$$

where

$$c_1 = \frac{d(0)}{b_0 - \gamma(0)}, \quad c_2 = \frac{d(m)}{b_m + \gamma(m)}.$$

We denote by \mathcal{X}_+ the nonnegative cone of \mathcal{X} . We introduce some hypotheses on the different parameters :

1. $\gamma, d \in W^{1, \infty}(0, m)$ and $\mu, \beta_0, \beta_m \in L^\infty(0, m)$,
2. the functions μ, γ' and $s \mapsto \beta(s, y)$ are continuous at $s = 0$ and $s = m$ for every $y \in [0, m]$,
3. the operator

$$L^1(0, m) \ni u \rightarrow \int_0^m \beta(\cdot, y)u(y)dy \in L^1(0, m)$$

is weakly compact,

4. $b_0, b_m > 0$, $c_0, c_m \geq 0$, $\beta, \mu \geq 0$ and $d(s) \geq d_0 > 0$ for all $s \in [0, m]$.

Remark 4.1.1. According to the general criterion of weak compactness (see e.g. Section 4 in [156]), the third hypothesis amounts to

$$\sup_{y \in [0, m]} \int_0^m \beta(s, y)ds < \infty \text{ and } \lim_{|E| \rightarrow 0} \sup_{y \in [0, m]} \int_E \beta(s, y)ds = 0$$

and is satisfied as soon as there exists $\tilde{\beta} \in L^1(0, m)$ such that $\beta(s, y) \leq \tilde{\beta}(s)$ a.e. $(s, y) \in [0, m]^2$. This is the case for example if β is continuous on $[0, m]^2$.

Using (4.1)-(4.5)-(4.6), we define the operator \mathcal{A} by :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \begin{pmatrix} u \\ u_0 \\ u_m \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} u \\ u_0 \\ u_m \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} u \\ u_0 \\ u_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (du')' - (\gamma u)' - \mu u \\ (b_0 - \gamma(0))u'(0) - \rho_0 u_0 \\ -(b_m + \gamma(m))u'(m) - \rho_m u_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^m \beta(\cdot, y)u(y)dy \\ \int_0^m \beta_0(y)u(y)dy \\ \int_0^m \beta_m(y)u(y)dy \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

where the domain of \mathcal{A} is given by

$$D(\mathcal{A}) = \{(u, u_0, u_m) \in W^{2,1}(0, m) \times \mathbb{R}^2 : u(0) = u_0, u(m) = u_m\}.$$

We are then concerned with the following Cauchy problem

$$\begin{cases} U'(t) &= \mathcal{A}U(t), \\ U(0) &= (u^0, u_0^0, u_m^0) \in \mathcal{X} \end{cases}$$

where

$$U(t) = (u(t), u_0(t), u_m(t))^T.$$

4.1.2 Semigroup generation

We show here that \mathcal{A} is the generator of a C_0 -semigroup. The dissipativity arguments are essentially those in [51] but we prove directly that \mathcal{A} is closed, densely defined and satisfies the rank condition.

Theorem 4.1.2. *Let Assumption (4.4) be satisfied. Then \mathcal{A} is the infinitesimal generator of a quasi-contractive C_0 -semigroup $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ on \mathcal{X} .*

Proof. We may restrict ourselves to the operator A ; straightforward (bounded) perturbation arguments will end the proof.

1. Let us show that $\overline{D(A)} = \mathcal{X}$. Let $(u, u_0, u_m)^T \in \mathcal{X}$. Let $(u^j)_j$ be C^∞ functions with compact supports such that $u^j \rightarrow u$ in $L^1(0, m)$ and

$$\text{supp}(u^j) \subset [j^{-1}, m - j^{-1}]$$

We look for a parabola

$$f_0^j(s) = as^2 + bs + c \quad (s \in [0, j^{-1}])$$

such that

$$f_0^j(0) = u_0, \quad f_0^j(j^{-1}) = 0, \quad \frac{df_0^j}{ds}(j^{-1}) = 0.$$

This amounts to $c = u_0$ and

$$\begin{aligned} aj^{-2} + bj^{-1} + u_0 &= 0 \\ 2aj^{-1} + b &= 0. \end{aligned}$$

We find

$$f_0^j(s) = j^2 u_0 s^2 - 2j u_0 s + u_0 = u_0 (js - 1)^2.$$

Similarly, we look for a parabola

$$f_m^j(s) = as^2 + bs + c \quad (s \in [m - j^{-1}, m])$$

such that

$$f_m^j(m) = u_m, \quad f_m^j(m - j^{-1}) = 0, \quad \frac{df_m^j}{ds}(m - j^{-1}) = 0.$$

We find

$$f_m^j(s) = u_m j^2 s^2 - 2u_m j^2 s(m - j^{-1}) + u_m j^2 (m - j^{-1})^2 = u_m j^2 (s - m + j^{-1})^2.$$

Define

$$v^j(s) = \begin{cases} f_0^j(s) & \text{if } s \in [0, j^{-1}] \\ u^j(s) & \text{if } s \in [j^{-1}, m - j^{-1}] \\ f_m^j(s) & \text{if } s \in [m - j^{-1}, m]. \end{cases}$$

Then $v^j \in W^{2,1}(0, m)$, $v^j(0) = u_0$ and $v^j(m) = u_m$, i.e.

$$(v^j, v^j(0), v^j(m))^T \in D(A).$$

Let us show that $v^j \rightarrow u$ in $L^1(0, m)$. It suffices to show that

$$\int_0^{j^{-1}} |f_0^j(s)| ds + \int_{m-j^{-1}}^m |f_m^j(s)| ds \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty).$$

We have

$$\begin{aligned} \int_0^{j^{-1}} |f_0^j(s)| ds &= |u_0| \int_0^{j^{-1}} (js - 1)^2 ds \\ &= j^2 |u_0| \int_0^{j^{-1}} (s - j^{-1})^2 ds \\ &= \frac{|u_0|}{3j} \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Similarly

$$\int_{m-j^{-1}}^m |f_m^j(s)| ds = \frac{|u_m|}{3j} \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty).$$

Finally

$$(v^j, v^j(0), v^j(m))^T \rightarrow (u, u_0, u_m)^T \text{ in } \mathcal{X}$$

and $\overline{D(A)} = \mathcal{X}$.

2. Let us show that for ω large enough $A - \omega$ is a dissipative operator. Let $\lambda > 0$, $U = (u, u_0, u_m)^T \in D(A)$ and $H = ((\lambda + \omega)I - A)U$.

Let $H = (h, h_0, h_m)^T$. We have to prove that

$$\|H\|_{\mathcal{X}} \geq \lambda \|U\|_{\mathcal{X}}.$$

By definition of H , we have

$$(\lambda + \hat{\mu}(s))u(s) + (\gamma u)'(s) - (du')'(s) = h(s), \quad s \in (0, m), \quad (4.7)$$

$$(\lambda + \hat{\rho}_0)u_0 - (b_0 - \gamma(0))u'(0) = h_0, \quad (4.8)$$

$$(\lambda + \hat{\rho}_m)u_m + (b_m + \gamma(m))u'(m) = h_m \quad (4.9)$$

where

$$\hat{\mu}(s) := \omega + \mu(s), \quad \hat{\rho}_0 := \omega + \rho_0, \quad \hat{\rho}_m := \omega + \rho_m.$$

We multiply (4.7) by $\text{sign}(u(s))$, integrate between 0 and m and then multiply (4.8) and (4.9) respectively by $\text{sign}(u_0)$ and $\text{sign}(u_m)$. We get

$$\lambda \|u\|_{L^1} + \int_0^m \hat{\mu}|u| - \int_0^m (du')' \text{sign}(u) + \int_0^m (\gamma u)' \text{sign}(u) = \int_0^m h \text{sign}(u),$$

$$(\lambda + \hat{\rho}_0)|u_0| - (b_0 - \gamma(0))u'(0) \text{sign}(u(0)) = h_0 \text{sign}(u(0)),$$

$$(\lambda + \hat{\rho}_m)|u_m| + (b_m + \gamma(m))u'(m) \text{sign}(u(m)) = h_m \text{sign}(u(m))$$

which is equivalent to

$$\lambda \|u\|_{L^1} + \int_0^m \hat{\mu}|u| - \int_0^m (du')' \text{sign}(u) + \int_0^m (\gamma u)' \text{sign}(u) = \int_0^m h \text{sign}(u), \quad (4.10)$$

$$u'(0) \text{sign}(u(0)) = \frac{(\lambda + \hat{\rho}_0)|u_0|}{b_0 - \gamma(0)} - \frac{h_0 \text{sign}(u(0))}{b_0 - \gamma(0)}, \quad (4.11)$$

$$u'(m) \text{sign}(u(m)) = -\frac{(\lambda + \hat{\rho}_m)|u_m|}{b_m + \gamma(m)} + \frac{h_m \text{sign}(u(m))}{b_m + \gamma(m)}. \quad (4.12)$$

- (a) Any nonempty open set of the real line is a finite or countable union of *disjoint* open intervals (see [3] Theorem 3.11, p. 51) so

$$\begin{aligned}\{u > 0\} &= \{s \in (0, m) : u(s) > 0\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (a_{i,1}, a_{i,2}), \\ \{u < 0\} &= \{s \in (0, m) : u(s) < 0\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (b_{i,1}, b_{i,2}).\end{aligned}$$

Since $u \in W^{1,1}(0, m) \hookrightarrow \mathcal{C}([0, m])$ then $\forall i, j \in \mathbb{N} : u(a_{i,1}) = 0, u(a_{i,2}) = 0, u(b_{j,1}) = 0$ and $u(b_{j,2}) = 0$ (except possibly at 0 and m). Thus

$$\begin{aligned}\int_0^m (\gamma u)' \operatorname{sign}(u) &= \int_{\{u>0\}} (\gamma u)' - \int_{\{u<0\}} (\gamma u)' \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} [\gamma(a_{i,2})u(a_{i,2}) - \gamma(a_{i,1})u(a_{i,1})] - \sum_{j \in \mathbb{N}} [\gamma(b_{j,2})u(b_{j,2}) - \gamma(b_{j,1})u(b_{j,1})] \\ &= \gamma(m) |u(m)| - \gamma(0) |u(0)|.\end{aligned}\tag{4.13}$$

- (b) Consider $\int_0^m (du)'(s) \operatorname{sign}(u(s)) ds$. Since $u' \in W^{1,1}(0, m) \hookrightarrow \mathcal{C}([0, m])$ we have $\forall i, j \in \mathbb{N} : u'(a_{i,2}) \leq 0, u'(a_{i,1}) \geq 0, u'(b_{j,2}) \geq 0$ and $u'(b_{j,1}) \leq 0$ (except possibly at 0 and m). We have

$$\begin{aligned}\int_0^m (du)' \operatorname{sign}(u) &= \int_{\{u>0\}} (du)' - \int_{\{u<0\}} (du)' \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} [d(a_{i,2})u'(a_{i,2}) - d(a_{i,1})u'(a_{i,1})] - \sum_{j \in \mathbb{N}} [d(b_{j,2})u'(b_{j,2}) - d(b_{j,1})u'(b_{j,1})] \\ &\leq d(m)u'(m) \operatorname{sign}(u(m)) - d(0)u'(0) \operatorname{sign}(u(0)).\end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned}\lambda \|u\|_{L^1} + \int \hat{\mu} |u| + \gamma(m) |u(m)| - \gamma(0) |u(0)| \\ \leq d(m)u'(m) \operatorname{sign}(u(m)) - d(0)u'(0) \operatorname{sign}(u(0)) + \int h \operatorname{sign}(u).\end{aligned}$$

Since

$$d(0)u'(0) \operatorname{sign}(u(0)) = \frac{d(0)(\lambda + \hat{\rho}_0) |u_0|}{b_0 - \gamma(0)} - \frac{d(0)h_0 \operatorname{sign}(u(0))}{b_0 - \gamma(0)}$$

and

$$d(m)u'(m) \operatorname{sign}(u(m)) = -\frac{d(m)(\lambda + \hat{\rho}_m) |u_m|}{b_m + \gamma(m)} + \frac{d(m)h_m \operatorname{sign}(u(m))}{b_m + \gamma(m)}$$

then

$$\begin{aligned}\lambda \|u\|_{L^1} + \left[\gamma(m) + \frac{d(m)(\lambda + \hat{\rho}_m)}{b_m + \gamma(m)} \right] |u(m)| + \left[-\gamma(0) + \frac{d(0)(\lambda + \hat{\rho}_0)}{b_0 - \gamma(0)} \right] |u(0)| \\ + \int \hat{\mu} |u| \\ \leq \frac{d(m)h_m \operatorname{sign}(u(m))}{b_m + \gamma(m)} + \frac{d(0)h_0 \operatorname{sign}(u(0))}{b_0 - \gamma(0)} + \int h \operatorname{sign}(u) \\ \leq \frac{d(m) |h_m|}{b_m + \gamma(m)} + \frac{d(0) |h_0|}{b_0 - \gamma(0)} + \|h\|_{L^1}\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} & \lambda \|u\|_{L^1} + \int \widehat{\mu}|u| + \left[\frac{\gamma(m)}{c_2} + (\lambda + \widehat{\rho}_m) \right] c_2 |u(m)| + \left[-\frac{\gamma(0)}{c_1} + (\lambda + \widehat{\rho}_0) \right] c_1 |u(0)| \\ & \leq c_2 |h_m| + c_1 |h_0| + \|h\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Note that if

$$\frac{\gamma(m)}{c_2} + \widehat{\rho}_m \geq 0 \quad \text{and} \quad -\frac{\gamma(0)}{c_1} + \widehat{\rho}_0 \geq 0$$

then

$$\lambda \|u\|_{L^1} + \int \widehat{\mu}|u| + \lambda c_2 |u(m)| + \lambda c_1 |u(0)| \leq c_2 |h_m| + c_1 |h_0| + \|h\|_{L^1}.$$

But

$$\frac{\gamma(m)}{c_2} + \widehat{\rho}_m = \frac{\gamma(m)(b_m + \gamma(m))}{d(m)} + \gamma'(m) + \mu(m) + c_m + \omega$$

and

$$-\frac{\gamma(0)}{c_1} + \widehat{\rho}_0 = -\frac{\gamma(0)(b_0 - \gamma(0))}{d(0)} + \gamma'(0) + \mu(0) + c_0 + \omega$$

are *nonnegative* for ω large enough. Hence

$$\lambda \|u\|_{L^1} + \int (\mu + \omega)|u| + \lambda c_2 |u(m)| + \lambda c_1 |u(0)| \leq c_2 |h_m| + c_1 |h_0| + \|h\|_{L^1}$$

and

$$\lambda \|U\|_{\mathcal{X}} \leq \|H\|_{\mathcal{X}}$$

for ω large enough..This ends the proof of the dissipativity of $A - \omega$.

3. Let us prove that $(A, D(A))$ is a *closed* operator.

Let $(U^n)_{n \in \mathbb{N}} := (u^n, u_0^n, u_m^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ and let $U := (u, u_0, u_m) \in \mathcal{X}$ and $G := (g, g_0, g_m) \in \mathcal{X}$ such that $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U^n - U\|_{\mathcal{X}} = 0$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} \|AU^n - G\|_{\mathcal{X}} = 0$. Note that

$$u^n(0) = u_0^n \rightarrow u_0 \quad \text{and} \quad u^n(m) = u_m^n \rightarrow u_m.$$

Since

$$(b_0 - \gamma(0))(u^n)'(0) - \rho_0 u^n(0) \rightarrow g_0$$

then

$$(u^n)'(0) \rightarrow h_0 := \frac{g_0 + \rho_0 u_0}{b_0 - \gamma(0)}.$$

Similarly

$$-(b_m + \gamma(m))(u^n)'(m) - \rho_m u^n(m) \rightarrow g_m$$

and

$$(u^n)'(m) \rightarrow h_m := -\frac{g_m + \rho_m u_m}{b_m + \gamma(m)}.$$

Let

$$f_n := d(u^n)' - \gamma u^n.$$

Since

$$(d(u^n)')' - (\gamma u^n)' - \mu u^n \rightarrow g$$

then

$$f'_n \rightarrow g + \mu u$$

(L^1 convergence) while

$$f_n(0) = d(0)(u^n)'(0) - \gamma(0)u^n(0) \rightarrow d(0)h_0 - \gamma(0)u_0$$

so

$$f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f'_n(s)ds \rightarrow z(x) := d(0)h_0 - \gamma(0)u_0 + \int_0^x (g + \mu u)(s)ds$$

(L^1 convergence). It follows that

$$(u^n)' \rightarrow \frac{z + \gamma u}{d}$$

(L^1 convergence) so $u \in W^{1,1}(0, m)$ and $u^n \rightarrow u$ in $W^{1,1}(0, m)$. In particular

$$u(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} u^n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_0^n = u_0$$

and

$$u(m) = \lim_{n \rightarrow \infty} u^n(m) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_m^n = u_m.$$

Knowing that $u^n \rightarrow u$ in $W^{1,1}(0, m)$, the fact that

$$(d(u^n)')' - (\gamma u^n)' - \mu u^n \rightarrow g$$

implies that $(u^n)''$ converges in $L^1(0, m)$ so that $u \in W^{2,1}(0, m)$ and $u^n \rightarrow u$ in $W^{2,1}(0, m)$. Finally $U \in D(A)$, $G = AU$. This ends the proof of the closedness of A .

4. Let us prove that $(\lambda I - A) : D(A) \rightarrow \mathcal{X}$ is a surjective operator for $\lambda > 0$ large enough.

We consider first a *particular* case

$$H = (h, h_0, h_m)^T \in L^2(0, m) \times \mathbb{R}^2.$$

We look for $U := (u, u_0, u_m)^T \in D(A)$ such that $(\lambda I - A)U = H$, i.e.

$$(\lambda + \mu)u - (du')' + (\gamma u)' = h \text{ in } [0, m], \quad (4.14)$$

$$(\lambda + \rho_0)u_0 - (b_0 - \gamma(0))u'(0) = h_0, \quad (4.15)$$

$$(\lambda + \rho_m)u_m + (b_m + \gamma(m))u'(m) = h_m. \quad (4.16)$$

We multiply (4.14) by $v \in H^1(0, m)$ and integrate between 0 and m to get

$$\lambda \int_0^m uv + \int_0^m \mu uv - \int_0^m (du')'v + \int_0^m (\gamma u)'v = \int_0^m hv.$$

An integration by parts, with (4.15)-(4.16) leads to

$$\begin{aligned} & \lambda \int_0^m uv + \int_0^m \mu uv + \int_0^m du'v' - \int_0^m \gamma uv' + K_0 u(0)v(0) + K_m u(m)v(m) \\ & = \int_0^m hv + c_1 h_0 v(0) + c_2 h_m v(m), \end{aligned} \quad (4.17)$$

where $K_0 = c_1(\lambda + \rho_0) - \gamma(0)$ and $K_m = c_2(\lambda + \rho_m) + \gamma(m)$.

We define the bilinear form

$$a : H^1(0, m) \times H^1(0, m) \rightarrow \mathbb{R}$$

by the left hand side and a linear form $L : H^1(0, m) \rightarrow \mathbb{R}$ by the right hand side of (4.17), to get

$$a(u, v) = L(v).$$

Let us check the conditions of Lax-Milgram Theorem. The continuity of a and L are easily obtained by using the trace theory. The inequality

$$2ab \leq \frac{a^2}{\varepsilon^2} + (\varepsilon b)^2 \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

implies

$$\int_0^m \gamma u u' \leq \|\gamma\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|u'\|_{L^2} \leq \|\gamma\|_{L^\infty} \left(\frac{\|u\|_{L^2}^2}{2\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^2 \|u'\|_{L^2}^2}{2} \right)$$

and consequently

$$\begin{aligned} |a(u, u)| &\geq \left(\lambda - \frac{\|\gamma\|_{L^\infty}}{2\varepsilon^2} \right) \|u\|_{L^2}^2 + \left(d_0 - \frac{\|\gamma\|_{L^\infty} \varepsilon^2}{2} \right) \|u'\|_{L^2}^2 \\ &\quad + K_0 u(0)^2 + K_m u(m)^2. \end{aligned}$$

Taking first $\varepsilon > 0$ small enough and then λ large enough, we finally get a coercivity estimate $|a(u, u)| \geq K \|u\|_{H^1}^2$ where $K > 0$ is a constant. By Lax-Milgram Theorem, for every $H \in L^2(0, m) \times \mathbb{R}^2$, there exists a unique $u \in H^1(0, m)$ such that $a(u, v) = L(v)$ for every $v \in H^1(0, m)$. Now, we need to verify that U belongs to $D(A)$, where U is defined by $U := (u, u(0), u(m)) = (u, u_0, u_m)$. For this, we use (4.17) with $v \in \mathcal{C}_c^\infty([0, m])$. Then

$$\left| \int_0^m du' v' \right| \leq (|\lambda| + \|\mu\|_{L^\infty}) \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|\gamma\|_{L^\infty} \left| \int_0^m uv' \right| + \|h\|_{L^2} \|v\|_{L^2}.$$

Since $u \in H^1(0, m)$ then $|\int_0^m uv'| \leq C \|v\|_{L^2}$. Consequently

$$\left| \int_0^m du' v' \right| \leq [(|\lambda| + \|\mu\|_{L^\infty}) \|u\|_{L^2} + C \|\gamma\|_{L^\infty} + \|h\|_{L^2}] \|v\|_{L^2} \leq K \|v\|_{L^2}.$$

Thus $du' \in H^1(0, m)$ and $u \in H^2(0, m) \subset W^{2,1}(0, m)$ so $U \in D(A)$.

Now we prove that $(\lambda I - A)U = H$ i.e. (4.14)-(4.15)-(4.16) are satisfied. An integration by parts of (4.17) with $v \in \mathcal{C}_c^\infty(0, m)$ implies (4.14). Moreover, an integration by parts of (4.17) with $v \in C^\infty(0, m)$ and $v(0) = 1, v(m) = 0$ (respectively $v(0) = 0, v(m) = 1$) gives us (4.15) (resp. (4.16)).

We deal now with the *surjectivity* of $(\lambda I - A)$. Let

$$H = (h, h_0, h_m) \in L^1(0, m) \times \mathbb{R}^2.$$

There exists a sequence $(H_n)_{n \geq 0} = (h^n, h_0, h_m) \in L^2(0, m) \times \mathbb{R}^2$ such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|H_n - H\|_{\mathcal{X}} = 0.$$

We know that $\forall n \geq 0, \exists! U_n \in D(A) : (\lambda I - A)U_n = H_n$. In particular $\forall n, m \geq 0, (\lambda I - A)(U_n - U_m) = H_n - H_m$. Using the dissipativity result shown before, we get

$$\|U_n - U_m\|_{\mathcal{X}} \leq C \|H_n - H_m\|_{\mathcal{X}}.$$

It follows that $(U_n)_{n \geq 0}$ is a Cauchy sequence in \mathcal{X} . Let U be its limit. Since $AU_n = -H_n + \lambda U_n$ then AU_n converges to $-H + \lambda U$. The *closedness* of A implies that $U \in D(A)$ and $(\lambda I - A)U = H$ and this ends the proof of the surjectivity.

Thus A generates a C_0 -semigroup $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ by Lumer-Phillips Theorem. Finally, as a bounded perturbation of A , \mathcal{A} generates also a quasi-contraction C_0 -semigroup $\{U(t)\}_{t \geq 0}$. \square

4.1.3 On irreducibility

To understand time asymptotics of $\{U(t)\}_{t \geq 0}$, we need to prove a key result related to positivity. Definitions and results about positive and irreducible operators are reminded in Section A.4. The main result of this subsection is :

Theorem 4.1.3. *The C_0 -semigroup $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ is irreducible.*

Proof. We have to show that the resolvent $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ is positivity improving for large λ . Using Theorem A.4.10 it is easy to see that for large λ

$$\begin{aligned} (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} &= (\lambda I - A - K)^{-1} = (\lambda I - A)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (K(\lambda I - A)^{-1})^n \\ &= (\lambda I - A)^{-1} + (\lambda I - A)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (K(\lambda I - A)^{-1})^n. \end{aligned}$$

It follows that *if* $(\lambda I - A)^{-1} \geq 0$ then

$$(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \geq (\lambda I - A)^{-1}$$

because K is a positive operator. Hence it suffices to prove that $(\lambda I - A)^{-1}$ is positivity improving.

Let us show *first* that

$$(\lambda I - A)^{-1} \geq 0.$$

Let $U = (\lambda I - A)^{-1}H$ with $H = (h, h_0, h_m) \in \mathcal{X}_+$. Since $\mathcal{C}^+([0, m])$ is dense in $L^1_+(0, m)$, we may assume without loss of generality that

$$h \in \mathcal{C}^+([0, m]).$$

Thus

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu(s))u(s) + (\gamma u)'(s) - (du')'(s) &= h(s), s \in (0, m), \\ (\lambda + \rho_0)u_0 - (b_0 - \gamma(0))u'(0) &= h_0, \\ (\lambda + \rho_m)u_m + (b_m + \gamma(m))u'(m) &= h_m. \end{aligned}$$

The first equation is

$$-u'' + \rho_1 u' + \rho_2 u = \rho_3$$

where $\rho_1 = -(d' - \gamma)/d$,

$$\rho_2(s) = (\lambda + \mu(s) + \gamma'(s))/d(s) > 0 \quad \forall s \text{ for } \lambda \text{ large enough}$$

and

$$\rho_3 = h/d \geq 0.$$

The *absolute minimum* of u is achieved at some $\bar{s} \in [0, m]$. Let us show that $u(\bar{s}) \geq 0$. If not, i.e. if $u(\bar{s}) < 0$ then $\bar{s} \notin (0, m)$. Indeed, this would imply that

$$0 \geq -u''(\bar{s}) = -\rho_2(\bar{s})u(\bar{s}) + \rho_3(\bar{s}) \geq -\rho_2(\bar{s})u(\bar{s}) > 0$$

which is contradictory. Hence $\bar{s} = 0$ or $\bar{s} = m$. If $\bar{s} = 0$ since

$$(\lambda + \rho_0)u(0) - (b_0 - \gamma(0))u'(0) = h_0$$

then

$$-(b_0 - \gamma(0))u'(0) = -(\lambda + \rho_0)u(0) + h_0 \geq -(\lambda + \rho_0)u(0) > 0.$$

It follows that $u'(0) < 0$ and then $u'(s) < 0$ in the neighborhood of $s = 0$ which contradicts the fact that the absolute minimum is achieved at 0. We argue similarly if $\bar{s} = m$. Finally, $u \geq 0$.

Let us show now that $(\lambda I - A)^{-1}$ is *positivity improving*. We note first that for any $\nu > \lambda$, the resolvent identity

$$(\lambda I - A)^{-1} = (\nu I - A)^{-1} + (\nu - \lambda)(\lambda I - A)^{-1}(\nu I - A)^{-1}$$

shows that

$$(\lambda I - A)^{-1} \geq (\nu - \lambda)(\lambda I - A)^{-1}(\nu I - A)^{-1}$$

so

$$(\lambda I - A)^{-1}H \geq (\lambda I - A)^{-1}G$$

where

$$G := (\nu - \lambda)(\nu I - A)^{-1}H \in \mathcal{X}_+$$

has the peculiarity of belonging to

$$D(A) \subset W^{2,1}(0, m) \times \mathbb{R}^2 \subset \mathcal{C}([0, m]) \times \mathbb{R}^2.$$

Hence, without loss of generality, we may assume that $H = (h, h_0, h_m) \in \mathcal{X}_+$ is such that $h \in \mathcal{C}^+([0, m])$. Let us show that

$$u(s) > 0 \text{ a.e.}, \quad u(0) > 0, \quad u(m) > 0$$

once

$$H = (h, h_0, h_m) \in \mathcal{X}_+ - \{0\}.$$

Let us show by contradiction that $\min u > 0$.

The *absolute minimum* of u is achieved at some $\bar{s} \in [0, m]$. Suppose $u(\bar{s}) = 0$. Then

$$v := -u$$

satisfies the equation

$$v'' - \rho_1 v' + \tilde{\rho}_2 v = h/d \geq 0$$

where $\tilde{\rho}_2 \leq 0$. Note that

$$\max v = -\min u \geq 0.$$

If u reaches its minimum in $(0, m)$ then v reaches its maximum in $(0, m)$. By the maximum principle (see Theorem A.7.1), v must be constant and then u is equal to the constant $u(\bar{s}) = 0$. It follows that

$$0 = h_0, \quad 0 = h_m, \quad 0 = h$$

which is contradictory. Hence

$$u(s) > 0 \quad \forall s \in (0, m)$$

and $u(0) = 0$ or $u(m) = 0$. Thus v reaches its maximum (equal to zero) at $\bar{s} = 0$ or $\bar{s} = m$. If $\bar{s} = 0$ then $v'(0) < 0$ by Hopf's maximum principle (see Theorem A.7.2); since

$$(b_0 - \gamma(0))v'(0) = h_0 \geq 0$$

we get a contradiction. If $\bar{s} = m$ then $v'(m) > 0$ by Hopf's maximum principle; since

$$-(b_m + \gamma(m))v'(m) = h_m$$

we get also a contradiction. Finally $\min u > 0$. □

4.1.4 On the spectral bound of the generator

We have :

Theorem 4.1.4. *The spectral bound of \mathcal{A} is finite, i.e. $s(\mathcal{A}) > -\infty$.*

Proof. According to Theorem 4.1.3, for $\lambda > s(\mathcal{A})$, $(\lambda - \mathcal{A})^{-1}$ is positivity improving and therefore irreducible. Since $(\lambda - \mathcal{A})^{-1}$ is also compact then

$$r_\sigma((\lambda - \mathcal{A})^{-1}) > 0,$$

(see Theorem A.4.7). On the other hand

$$r_\sigma((\lambda - \mathcal{A})^{-1}) = \frac{1}{\lambda - s(\mathcal{A})}$$

(see Theorem A.4.6) whence $s(\mathcal{A}) > -\infty$. □

Remark 4.1.5. Theorem 4.1.4 provides us with the existence of a real leading eigenvalue since $s(\mathcal{A}) \in \sigma(\mathcal{A})$ (see Theorem A.4.5).

4.1.5 On asynchronous exponential growth

Some definitions and results about *asynchronous exponential growth* are reminded in Section 1.4.4.

Remark 4.1.6. Note that \mathcal{A} has a compact resolvent (and consequently the spectrum of \mathcal{A} is composed (at most) of isolated eigenvalues with finite algebraic multiplicity). This follows from the fact that the canonical injection $i : (D(A), \|\cdot\|_{D(A)}) \rightarrow (\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ is compact (by Rellich Kondrachov's Theorem) and $D(A) = D(\mathcal{A})$ since $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ (see e.g. Theorem A.3.3).

We are ready to give the main result of this subsection.

Theorem 4.1.7. *If $K \neq 0$ then the semigroup $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ generated by \mathcal{A} has asynchronous exponential growth.*

Proof. The semigroups $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ and $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ are related by the Duhamel equation

$$U(t) = T(t) + \int_0^t T(t-s)KU(s)ds.$$

Since K is a weakly compact operator then so is $T(t-s)KU(s)$ for all $s \geq 0$. It follows that the *strong* integral

$$\int_0^t T(t-s)KU(s)ds$$

is a weakly compact operator (see [109] Theorem 1 or [137] Theorem 2.2). Hence $U(t) - T(t)$ is a weakly compact operator and consequently (see [108] Theorem 2.10, p. 24) $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ and $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ have the *same* essential type

$$\omega_{ess}(\mathcal{A}) = \omega_{ess}(A),$$

in particular

$$\omega_{ess}(\mathcal{A}) \leq \omega_0(A).$$

Let $\lambda > s(\mathcal{A}) \geq s(A)$. The positivity improving compact operators $O_1 := (\lambda - A)^{-1}$ and $O_2 := (\lambda - \mathcal{A})^{-1}$ are such that

$$O_2 \geq O_1 \geq 0 \text{ and } O_2 \neq O_1$$

since $K \neq 0$. It follows from Theorem A.4.9 that

$$r_\sigma(O_1) < r_\sigma(O_2).$$

In addition, according to Theorem A.4.6,

$$r_\sigma [(\lambda - A)^{-1}] = \frac{1}{\lambda - s(A)} \text{ and } r_\sigma [(\lambda - \mathcal{A})^{-1}] = \frac{1}{\lambda - s(\mathcal{A})}$$

so

$$s(A) < s(\mathcal{A}).$$

Note that $s(A) = \omega_0(A)$ and $s(\mathcal{A}) = \omega_0(\mathcal{A})$ since $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ and $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ are positive semigroups on L^1 spaces (see e.g. Theorem A.4.3) so $\omega_0(A) < \omega_0(\mathcal{A})$ and

$$\omega_{ess}(\mathcal{A}) < \omega_0(\mathcal{A}).$$

By combining this last result and the irreducibility of $\{U(t)\}_{t \geq 0}$, Theorem 1.4.13 ends the proof. \square

Remark 4.1.8. Note that in Theorem 4.1.7, the requirement $K \neq 0$ amounts to the fact that the function β is not identically zero.

4.2 Models with unbounded sizes

In this section, we generalize the theory to the case

$$m = \infty$$

allowing *arbitrary* sizes, i.e. we study the model

$$\partial_t u(t, s) + \partial_s(\gamma(s)u(t, s)) = \partial_s(d(s)\partial_s u(t, s)) - \mu(s)u(t, s) + \int_0^\infty \beta(s, y)u(t, y)dy, \quad (4.18)$$

$$[\partial_s(d(s)\partial_s u(t, s))]_{s=0} - b_0\partial_s u(t, 0) + c_0u(t, 0) = 0. \quad (4.19)$$

4.2.1 Framework and hypotheses

The boundary condition (4.19) can be rewritten into the following dynamic form

$$\partial_t u(t, 0) = -u(t, 0)\rho_0 + \partial_s u(t, 0)(b_0 - \gamma(0)) + \int_0^\infty \beta_0(y)u(t, y)dy. \quad (4.20)$$

Let

$$\mathcal{X}_\infty = (L^1(0, \infty) \times \mathbb{R}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}_\infty})$$

with norm

$$\|(x, x_0)\|_{\mathcal{X}_\infty} = \|x\|_{L^1(0, \infty)} + c_1|x_0|.$$

We assume that

$$b_0 - \gamma(0) > 0 \quad (4.21)$$

and denote by $\mathcal{X}_{\infty,+}$ the nonnegative cone of \mathcal{X}_∞ . We now introduce some hypotheses on the different parameters :

1. $\gamma, d \in W^{1,\infty}(0, \infty)$ and $\mu, \beta_0 \in L^\infty(0, \infty)$,
2. the functions μ, γ' and $s \mapsto \beta(s, y)$ are continuous at $s = 0$, for every $y \geq 0$,
3. the operator

$$L^1(0, \infty) \ni u \rightarrow \int_0^\infty \beta(\cdot, y)u(y)dy \in L^1(0, \infty)$$

is weakly compact,

4. $b_0 > 0, c_0 \geq 0, \beta, \mu \geq 0$ and $d(s) \geq d_0 > 0$ a.e. $s \geq 0$.

Remark 4.2.1. According to the general criterion of weak compactness, the third hypothesis amounts to

$$\begin{aligned} \sup_{y \in [0, \infty)} \int_0^\infty \beta(s, y)ds < \infty, \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \sup_{y \in [0, \infty)} \int_c^\infty \beta(s, y)ds = 0, \\ \lim_{|E| \rightarrow 0} \sup_{y \in [0, \infty)} \int_E \beta(s, y)ds = 0. \end{aligned}$$

Define

$$W_{loc}^{2,1}(\mathbb{R}_+) := \left\{ u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+); u \in W^{2,1}(0, c) \forall c > 0 \right\}.$$

By means of (4.18)-(4.20), we define the operator \mathcal{A}_∞ by

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\infty \begin{pmatrix} u \\ u_0 \end{pmatrix} &= A_\infty \begin{pmatrix} u \\ u_0 \end{pmatrix} + K_\infty \begin{pmatrix} u \\ u_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (du')' - (\gamma u)' - \mu u \\ (b_0 - \gamma(0))u'(0) - \rho_0 u_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^\infty \beta(\cdot, y)u(y)dy \\ \int_0^\infty \beta_0(y)u(y)dy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

with domain $D(\mathcal{A}_\infty)$ given by

$$\left\{ (u, u_0) \in \mathcal{X}_\infty; u \in W_{loc}^{2,1}(\mathbb{R}_+), u(0) = u_0, (du')' - (\gamma u)' \in L^1(\mathbb{R}_+) \text{ and } \lim_{s \rightarrow \infty} d(s)u'(s) - \gamma(s)u(s) = 0 \right\}.$$

Note that

$$d(s)u'(s) - \gamma(s)u(s) = d(0)u'(0) - \gamma(0)u(0) + \int_0^s z(\tau)d\tau$$

where

$$z := (du')' - (\gamma u)' \in L^1(\mathbb{R}_+)$$

shows that $\lim_{s \rightarrow \infty} d(s)u'(s) - \gamma(s)u(s)$ exists.

As previously, we are concerned with the Cauchy problem

$$\begin{cases} U'(t) = \mathcal{A}_\infty U(t), \\ U(0) = (u^0, u_0^0) \in \mathcal{X}_\infty \end{cases}$$

where

$$U(t) = (u(t), u_0(t))^T.$$

4.2.2 Semigroup generation

The main result of this subsection is :

Theorem 4.2.2. *Let Assumption (4.21) be satisfied. Then \mathcal{A}_∞ is the infinitesimal generator of a quasi-contractive C_0 -semigroup $\{U_\infty(t)\}_{t \geq 0}$ on \mathcal{X}_∞ .*

Proof. As previously, we restrict ourselves to A_∞ since K_∞ is bounded.

1. Let us show that $\overline{D(A_\infty)} = \mathcal{X}_\infty$. Let $(u, u_0)^T \in \mathcal{X}_\infty$. Let $(u^j)_j$ be C^∞ functions with compact supports such that $u^j \rightarrow u$ in $L^1(0, \infty)$ and

$$\text{supp}(u^j) \subset [j^{-1}, \infty).$$

As in the finite case, we introduce the functions

$$v^j(s) = \begin{cases} f_0^j(s) & \text{if } s \in [0, j^{-1}] \\ u^j(s) & \text{if } s \geq j^{-1}, \end{cases}$$

where

$$f_0^j(s) = j^2 u_0 s^2 - 2j u_0 s + u_0 = u_0 (js - 1)^2$$

and we verify that

$$D(A_\infty) \ni (v^j, v^j(0))^T \rightarrow (u, u_0)^T \in \mathcal{X}_\infty$$

so $\overline{D(A_\infty)} = \mathcal{X}_\infty$.

2. Let us prove that $(A_\infty, D(A_\infty))$ is a closed operator. We argue as previously. Let $(U^n)_{n \in \mathbb{N}} := (u^n, u_0^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A_\infty)$ then let $U := (u, u_0) \in \mathcal{X}_\infty$ and $G := (g, g_0) \in \mathcal{X}_\infty$ such that $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U^n - U\|_{\mathcal{X}_\infty} = 0$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_\infty U^n - G\|_{\mathcal{X}_\infty} = 0$. Let

$$f_n := d(u^n)' - \gamma u^n.$$

Note that by assumption

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f_n(s) = 0. \quad (4.22)$$

Since

$$(d(u^n)')' - (\gamma u^n)' - \mu u^n \rightarrow g$$

($L^1(0, \infty)$ convergence) and

$$(b_0 - \gamma(0)) (u^n)'(0) - \rho_0 u^n(0) \rightarrow g_0$$

then

$$f_n' \rightarrow g + \mu u$$

($L^1(0, \infty)$ convergence) while

$$f_n(0) = d(0)(u^n)'(0) - \gamma(0)u^n(0) \rightarrow d(0)h_0 - \gamma(0)u_0$$

where

$$h_0 := \frac{g_0 + \rho_0 u_0}{b_0 - \gamma(0)}.$$

Hence

$$f_n(s) = f_n(0) + \int_0^s f_n'(\tau) d\tau \rightarrow z(s) := d(0)h_0 - \gamma(0)u_0 + \int_0^s (g + \mu u)(\tau) d\tau \quad (4.23)$$

in $L^1(0, c)$ for any finite c . It follows that

$$(u^n)' \rightarrow \frac{z + \gamma u}{d}$$

in $L^1(0, c)$ for any finite c so $u' \in L^1(0, c)$ and $u^n \rightarrow u$ in $W^{1,1}(0, c)$ for any finite c . In particular

$$u(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} u^n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_0^n = u_0.$$

Finally

$$f_n' - \mu u^n = (d(u^n)')' - (\gamma u^n)' - \mu u^n \rightarrow g$$

($L^1(0, \infty)$ convergence) implies that $(u^n)''$ converges in $L^1(0, c)$ for any finite c so that $u \in W^{2,1}(0, c)$ for any finite c and

$$(d(u)')' - (\gamma u)' - \mu u = g.$$

Note that (4.23) shows that

$$\begin{aligned} & |f_n(s) - z(s)| \\ & \leq |f_n(0) - (d(0)h_0 - \gamma(0)u_0)| + \int_0^\infty |f_n'(\tau) - (g(\tau) + \mu(\tau)u(\tau))| d\tau \rightarrow 0 \end{aligned}$$

so

$$f_n(s) \rightarrow z(s) = d(s)u'(s) - \gamma(s)u(s) \text{ uniformly on } \mathbb{R}_+$$

and (4.22) implies

$$\lim_{s \rightarrow \infty} d(s)u'(s) - \gamma(s)u(s) = 0.$$

Thus $U \in D(A_\infty)$ and $G = A_\infty U$.

3. We consider now the dissipativity of $(A_\infty - \omega I)$ for ω large enough. Let $\lambda > 0$, $U = (u, u_0)^T \in D(A_\infty)$ and $H = ((\lambda + \omega)I - A_\infty)U$.

Let $H = (h, h_0)^T$. We have to prove that

$$\|H\|_{X_\infty} \geq \lambda \|U\|_{X_\infty}.$$

By definition of H , we have

$$\begin{aligned} (\lambda + \hat{\mu}(s))u(s) + (\gamma u)'(s) - (du')'(s) &= h(s), \quad s \in (0, \infty), \\ (\lambda + \hat{\rho}_0)u_0 - (b_0 - \gamma(0))u'(0) &= h_0, \end{aligned}$$

where

$$\hat{\mu}(s) := \omega + \mu(s), \quad \hat{\rho}_0 := \omega + \rho_0.$$

By integration

$$\begin{aligned} \lambda \|u\|_{L^1} + \int_0^\infty \hat{\mu}|u| - \int_0^\infty (du')' \text{sign}(u) + \int_0^\infty (\gamma u)' \text{sign}(u) &= \int_0^\infty h \text{sign}(u), \\ u'(0) \text{sign}(u(0)) &= \frac{(\lambda + \hat{\rho}_0)|u_0|}{b_0 - \gamma(0)} - \frac{h_0 \text{sign}(u(0))}{b_0 - \gamma(0)}. \end{aligned}$$

Since $u \in W_{loc}^{2,1}(\mathbb{R}_+) \subset C^1(0, \infty)$, we get, for every finite $m > 0$

$$\int_0^m (du')' \text{sign}(u) \leq d(m)u'(m) \text{sign}(u(m)) - d(0)u'(0) \text{sign}(u(0))$$

and

$$\int_0^m (\gamma u)' \text{sign}(u) = \gamma(m)|u(m)| - \gamma(0)|u(0)|.$$

Consequently

$$\int_0^m (du')' \text{sign}(u) - \int_0^m (\gamma u)' \text{sign}(u) \leq (d(m)u'(m) - \gamma(m)u(m)) \text{sign}(u(m)) + l_0$$

where $l_0 = -d(0)u'(0) \text{sign}(u(0)) + \gamma(0)|u(0)|$. Since

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d(m)u'(m) - \gamma(m)u(m) = 0$$

then

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty (du')' \text{sign}(u) - \int_0^\infty (\gamma u)' \text{sign}(u) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^m (du')' \text{sign}(u) - \int_0^m (\gamma u)' \text{sign}(u) \leq l_0. \end{aligned}$$

Hence

$$\lambda \|u\|_{L^1} + \int_0^\infty \hat{\mu}|u| \leq l_0 + \int_0^\infty h \text{sign}(u)$$

so

$$\lambda \|u\|_{L^1} + \int_0^\infty \hat{\mu}|u| - \gamma(0)|u(0)| \leq -d(0)u'(0) \text{sign}(u(0)) + \int_0^\infty h \text{sign}(u).$$

Since

$$d(0)u'(0) \text{sign}(u(0)) = \frac{d(0)(\lambda + \hat{\rho}_0)|u_0|}{b_0 - \gamma(0)} - \frac{d(0)h_0 \text{sign}(u(0))}{b_0 - \gamma(0)}$$

then

$$\lambda \|u\|_{L^1} + \int_0^\infty \hat{\mu}|u|ds + \left[-\gamma(0) + \frac{d(0)(\lambda + \hat{\rho}_0)}{b_0 - \gamma_0} \right] |u(0)| \leq \frac{d(0)|h_0|}{b_0 - \gamma(0)} + \|h\|_{L^1}$$

or

$$\lambda \|u\|_{L^1} + \int_0^\infty \hat{\mu}|u|ds + \left[-\frac{\gamma(0)}{c_1} + (\lambda + \hat{\rho}_0) \right] c_1 |u(0)| \leq \|h\|_{L^1} + c_1 |h_0|.$$

Note that if

$$-\frac{\gamma(0)}{c_1} + \hat{\rho}_0 \geq 0$$

then

$$\lambda \|u\|_{L^1} + \int_0^\infty \hat{\mu}|u|ds + \lambda c_1 |u(0)| \leq \|h\|_{L^1} + c_1 |h_0|.$$

Since

$$-\frac{\gamma(0)}{c_1} + \hat{\rho}_0 = -\frac{\gamma(0)(b_0 - \gamma(0))}{d(0)} + \gamma'(0) + \mu(0) + c_0 + \omega$$

is *nonnegative* for ω large enough then

$$\lambda \|u\|_{L^1} + \int_0^\infty (\mu + \omega)|u|ds + \lambda c_1 |u(0)| \leq c_1 |h_0| + \|h\|_{L^1}$$

and

$$\lambda \|U\|_{\mathcal{X}_\infty} \leq \|H\|_{\mathcal{X}_\infty}$$

for ω large enough. Finally $A_\infty - \omega I$ is dissipative.

4. Let us prove that $(\lambda I - A_\infty) : D(A_\infty) \rightarrow \mathcal{X}_\infty$ is a surjective operator for $\lambda > 0$ large enough. We consider first a particular case

$$H = (h, h_0)^T \in L^1(0, \infty) \cap L^2(0, \infty) \times \mathbb{R}$$

We look for $U = (u, u_0)^T \in D(A_\infty)$ such that $(\lambda I - A_\infty)U = H$, i.e.

$$(\lambda + \mu)u - (du')' + (\gamma u)' = h \text{ in } \mathbb{R}_+, \quad (4.24)$$

$$(\lambda + \rho_0)u_0 - (b_0 - \gamma(0))u'(0) = h_0. \quad (4.25)$$

Multiply (4.24) by $v \in H^1(0, \infty)$ and integrate to get

$$\lambda \int_0^\infty uv + \int_0^\infty \mu uv - \int_0^\infty (du')'v + \int_0^\infty (\gamma u)'v = \int_0^\infty hv.$$

An integration by parts and (4.25) lead to

$$\lambda \int_0^\infty uv + \int_0^\infty \mu uv + \int_0^\infty du'v' - \int_0^\infty \gamma uv' + K_0 u(0)v(0) = \int_0^\infty hv + c_1 h_0 v(0). \quad (4.26)$$

One can show that the bilinear form defined by the left hand of (4.26) is coercive. By Theorem A.6.1, there exists a unique $u \in H^1(\mathbb{R}_+)$ satisfying (4.26) for all $v \in H^1(\mathbb{R}_+)$. It follows easily that $u \in H^2(\mathbb{R}_+)$. One sees that $U = (u, u(0))$ satisfies (4.24)-(4.25). Since $u \in H^2(\mathbb{R}_+)$ then $u \in W^{2,1}(0, c)$ for every $c > 0$ and

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u(m) = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} u'(m) = 0.$$

Since $\gamma, d \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ then

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d(m)u'(m) - \gamma(m)u(m) = 0.$$

Let us prove that $u \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Consider $\lambda := \tilde{\lambda} + \omega$, with $\tilde{\lambda}, \omega > 0$. Since

$$\begin{aligned} (\tilde{\lambda} + \hat{\mu}(s))u(s) + (\gamma u)'(s) - (du')'(s) &= h(s), \quad s \in (0, \infty), \\ (\lambda + \hat{\rho}_0)u_0 - (b_0 - \gamma(0))u'(0) &= h_0, \end{aligned}$$

then

$$\int_0^m (\tilde{\lambda} + \hat{\mu}(s)) |u(s)| ds = \int_0^m h \operatorname{sign}(u) + \int_0^m (du')' \operatorname{sign}(u) - \int_0^m (\gamma u)' \operatorname{sign}(u)$$

and

$$u'(0) \operatorname{sign}(u(0)) = \frac{(\tilde{\lambda} + \hat{\rho}_0)|u_0|}{b_0 - \gamma(0)} - \frac{h_0 \operatorname{sign}(u(0))}{b_0 - \gamma(0)}$$

so, using the above estimates,

$$\begin{aligned} & (\tilde{\lambda} + \omega) \int_0^m |u(s)| ds \\ & \leq \int_0^m h \operatorname{sign}(u) + (d(m)u'(m) - \gamma(m)u(m)) \operatorname{sign}(u(m)) - d(0)u'(0) \operatorname{sign}(u(0)) \\ & \quad + \gamma(0)|u(0)|. \end{aligned}$$

The fact that

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d(m)u'(m) - \gamma(m)u(m) = 0$$

gives

$$(\tilde{\lambda} + \omega) \int_0^\infty |u(s)| ds \leq \int_0^\infty h \operatorname{sign}(u) - d(0)u'(0) \operatorname{sign}(u(0)) + \gamma(0)|u(0)| < \infty$$

and $u \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Equation (4.24) shows that $(du')' - (\gamma u)' \in L^1(0, \infty)$. As for the previous finite case, by exploiting the *closedness* of A_∞ , we get the surjectivity of

$$(\lambda I - A_\infty) : D(A_\infty) \rightarrow \mathcal{X}_\infty.$$

Finally A_∞ generates a C_0 -semigroup $\{T_\infty(t)\}_{t \geq 0}$ by Lumer-Phillips' Theorem. □

Note that a priori the domain of the generator is *not*

$$\{(u, u_0) \in W^{2,1}(0, \infty) \times \mathbb{R} : u(0) = u_0\}$$

but this subspace turns out to be a core of $D(A_\infty)$. Indeed, we have :

Proposition 4.2.3. *Let $B : D(B) \subset \mathcal{X}_\infty \rightarrow \mathcal{X}_\infty$, be the restriction of A_∞ to*

$$\{(u, u_0) \in W^{2,1}(0, \infty) \times \mathbb{R} : u(0) = u_0\}.$$

Then B is closable with closure A_∞ .

Proof. Note first that A_∞ is closed and

$$B \subset A_\infty$$

(in the sense of graphs) so $\overline{B} \subset A_\infty$ and \overline{B} is a graph, i.e. B is closable.

To show that $\overline{B} = A_\infty$, it suffices to show that for any $U = (u, u(0)) \in D(A_\infty)$ there exists a sequence

$$U_n := (u^n, u^n(0)) \in D(B)$$

such that $u^n(0) \rightarrow u(0)$, $(u^n)'(0) \rightarrow u'(0)$,

$$u^n \rightarrow u \text{ in } L^1(\mathbb{R}_+)$$

and

$$(d(u^n)')' - (\gamma u^n)' \rightarrow (du')' - (\gamma u)' \text{ in } L^1(\mathbb{R}_+). \quad (4.27)$$

Let

$$\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

be a C^2 function such that

$$\sigma(s) = \begin{cases} 1 & \text{for } s \leq 0 \\ 0 & \text{for } s \geq 1. \end{cases}$$

Let

$$\sigma_n(s) := \sigma(s - n).$$

Note that

$$\sigma_n(s) = \begin{cases} 1 & \text{for } s \leq n \\ 0 & \text{for } s \geq n + 1. \end{cases}$$

Let $U = (u, u(0)) \in D(A_\infty)$ and

$$u^n(s) := \sigma_n(s)u(s) \quad (s \geq 0).$$

Note that $u^n \in W^{2,1}(0, \infty)$ and $u^n = u$ on $[0, n]$. In particular $u^n(0) = u(0)$ and $(u^n)'(0) = u'(0)$. Since $\sigma_n(s) \leq 1$ and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(s) = 1 \quad \forall s \geq 0$$

then

$$u^n \rightarrow u \text{ in } L^1(\mathbb{R}_+)$$

by the dominated convergence theorem. It suffices to show (4.27).

Note that

$$\begin{aligned} (u^n)' &= \sigma_n' u + \sigma_n u' \\ (\gamma u^n)' &= (\gamma \sigma_n u)' = (\gamma u) \sigma_n' + \sigma_n (\gamma u)' \\ d(u^n)' &= d\sigma_n' u + d\sigma_n u' \end{aligned}$$

and

$$(d(u^n)')' = \sigma_n''(du) + \sigma_n'(du)' + \sigma_n'(du') + \sigma_n(du')'$$

so

$$\begin{aligned} & (d(u^n)')' - (\gamma u^n)' \\ &= \sigma_n''(du) + \sigma_n'(du)' + \sigma_n'(du') + \sigma_n(du')' - (\gamma u) \sigma_n' - \sigma_n (\gamma u)' \\ &= \sigma_n [(du')' - (\gamma u)'] + [\sigma_n''(du) + \sigma_n'(du') - (\gamma u) \sigma_n'] + 2\sigma_n'(du)'. \end{aligned}$$

Since $(du)' - (\gamma u)' \in L^1(\mathbb{R}_+)$ then

$$\sigma_n [(du)' - (\gamma u)'] \rightarrow (du)' - (\gamma u)'$$

in $L^1(\mathbb{R}_+)$ by the dominated convergence theorem. Note that

$$\sup_s |\sigma'_n(s)| = \sup_s |\sigma'(s)| < \infty$$

$$\sup_s |\sigma''_n(s)| = \sup_s |\sigma''(s)| < \infty$$

and the supports of σ'_n and σ''_n are included in $[n, n+1]$ so

$$\sigma''_n(du) + \sigma'_n(d'u) - (\gamma u)' \sigma'_n \rightarrow 0$$

in $L^1(\mathbb{R}_+)$ in $L^1(\mathbb{R}_+)$ by the dominated convergence theorem because du , $d'u$ and γu belong to $L^1(\mathbb{R}_+)$. The most tricky term is

$$\sigma'_n(du').$$

Since

$$\lim_{s \rightarrow \infty} d(s)u'(s) - \gamma(s)u(s) = 0,$$

for any $\varepsilon > 0$ there exists $\bar{s} > 0$ such that

$$|d(s)u'(s) - \gamma(s)u(s)| \leq \varepsilon \quad (s \geq \bar{s}).$$

Then

$$|d(s)u'(s)| \leq \varepsilon + |\gamma(s)u(s)| \quad (s \geq \bar{s})$$

and

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} |\sigma'_n(s)d(s)u'(s)| ds &= \int_n^{n+1} |\sigma'_n(s)d(s)u'(s)| ds \\ &\leq \sup_s |\sigma'(s)| \int_n^{n+1} |d(s)u'(s)| ds \\ &\leq \varepsilon \sup_s |\sigma'(s)| + \sup_s |\sigma'(s)| \int_n^{n+1} |\gamma(s)u(s)| ds \end{aligned}$$

(for n large enough) so

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+} |\sigma'_n(s)d(s)u'(s)| ds \leq \varepsilon \sup_s |\sigma'(s)|$$

since $\gamma u \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Hence $\sigma'_n(du') \rightarrow 0$ in $L^1(\mathbb{R}_+)$ since ε is arbitrary. This ends the proof. \square

4.2.3 On irreducibility

The main result of this subsection is :

Proposition 4.2.4. *The C_0 -semigroup $\{U_\infty(t)\}_{t \geq 0}$ is irreducible.*

Proof. As for the previous finite case, it suffices to prove that $(\lambda I - A_\infty)^{-1}$ is positivity improving. Let us show first that

$$(\lambda I - A_\infty)^{-1} \geq 0.$$

Let $U := (u, u_0) = (\lambda I - A_\infty)^{-1}H$ with $H = (h, h_0) \in \mathcal{X}_{\infty,+}$ and denote by $\mathcal{C}_c^+([0, \infty[)$ the set of nonnegative continuous functions with compact support in $[0, \infty[$. Since $\mathcal{C}_c^+([0, \infty[)$ is dense in $L_+^1(0, \infty)$ we may assume without loss of generality that

$$h \in \mathcal{C}_c^+([0, \infty[).$$

Since $h \in (L^2 \cap L^1) \times \mathbb{R}$ then $u \in H^2(0, \infty)$. Now

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu(s))u(s) + (\gamma u)'(s) - (du')'(s) &= h(s), \quad s \in (0, \infty), \\ (\lambda + \rho_0)u_0 - (b_0 - \gamma(0))u'(0) &= h_0 \end{aligned}$$

shows that $u'' \in \mathcal{C}(0, \infty)$. We write

$$-u'' + \rho_1 u' + \rho_2 u = \rho_3$$

where $\rho_1 = -(d' - \gamma)/d$,

$$\rho_2(s) = (\lambda + \mu(s) + \gamma'(s))/d(s) > 0 \quad \forall s \text{ for } \lambda \text{ large enough}$$

and

$$\rho_3 = h/d \geq 0.$$

We want to show that $\inf u \geq 0$. If $\inf u < 0$ then the *absolute minimum* of u is achieved at some $\bar{s} \in [0, \infty)$ since $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = 0$. This implies that $\bar{s} = 0$ otherwise

$$0 \geq -u''(\bar{s}) = -\rho_2(\bar{s})u(\bar{s}) + \rho_3(\bar{s}) \geq -\rho_2(\bar{s})u(\bar{s}) > 0$$

would lead to a contradiction. But if $\bar{s} = 0$ then $u(0) < 0$ and the boundary condition

$$(\lambda + \rho_0)u(0) - (b_0 - \gamma(0))u'(0) = h_0$$

gives

$$-(b_0 - \gamma(0))u'(0) = -(\lambda + \rho_0)u(0) + h_0 \geq -(\lambda + \rho_0)u(0) > 0$$

so $u'(0) < 0$ and then $u'(s) < 0$ in the neighborhood of $s = 0$ which contradicts the fact that the absolute minimum is achieved at 0. Hence

$$\inf u \geq 0.$$

Let us show now that $(\lambda I - A_\infty)^{-1}$ is *positivity improving*. As for the previous finite case, by using the resolvent identity, we may assume, without loss of generality, that

$$H \in D(A_\infty) \cap \mathcal{X}_+.$$

In particular $u'' \in \mathcal{C}(0, \infty)$. Let us show that

$$u(s) > 0 \text{ a.e. and } u(0) > 0$$

once

$$H = (h, h_0) \in \mathcal{X}_{\infty,+} - \{0\}.$$

Let us show by contradiction that $u > 0$ everywhere. If the absolute minimum of u is *not* achieved, then $u > 0$ since $u \geq 0$. Consequently we only need to deal with the case where it is achieved at some $\bar{s} \in [0, \infty)$.

Suppose $u(\bar{s}) = 0$. Since $H \neq \{0\}$ then either $h_0 > 0$ or $\int_0^\infty h(s)ds > 0$. In any case, let $\bar{c} > \bar{s}$ such that ($h_0 > 0$ or $\int_0^{\bar{c}} h(s)ds > 0$). Note that the C^2 function

$$v := -u$$

satisfies the equation

$$v'' - \rho_1 v' + \tilde{\rho}_2 v = h/d \geq 0$$

on $[0, \bar{c}]$, where $\tilde{\rho}_2 \leq 0$. Note also that

$$\max_{[0, \bar{c}]} v = -\min_{[0, \bar{c}]} u \geq 0.$$

If u reaches its minimum in $(0, \bar{c})$ then v reaches its maximum in $(0, \bar{c})$. By the maximum principle (see Theorem A.7.1), v must be constant and then u is equal to the constant $u(\bar{s}) = 0$. It follows that

$$h_0 = 0, \quad h = 0 \text{ on } [0, \bar{c}]$$

which is contradictory.

If v reaches its maximum (equal to zero) at $\bar{s} = 0$ then $v'(0) < 0$ by Hopf's maximum principle (see Theorem A.7.2) which is contradictory since

$$(b_0 - \gamma(0))v'(0) = h_0 \geq 0.$$

Finally $u > 0$ everywhere. □

4.2.4 Asynchronous exponential growth

The main result of this subsection is :

Theorem 4.2.5. *We assume that there exists a measurable subset $I \subset \mathbb{R}_+$ with positive measure such that*

$$u \in L^1(\mathbb{R}_+), \quad u(y) > 0 \text{ a.e.} \implies \int_0^\infty \beta(s, y)u(y)dy > 0 \text{ a.e. } s \in I. \quad (4.28)$$

If

$$\lim_{\lambda \rightarrow s(A_\infty)} r_\sigma(K_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1}) > 1 \quad (4.29)$$

then the semigroup $\{U_\infty(t)\}_{t \geq 0}$ generated by \mathcal{A}_∞ has asynchronous exponential growth.

Proof. Since A_∞ is resolvent positive and $K_\infty \geq 0$ then

$$K_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1} \leq K_\infty(\mu - A_\infty)^{-1} \quad (\lambda > \mu)$$

and

$$(s(A_\infty), \infty) \ni \lambda \mapsto r_\sigma(K_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1}) \quad (4.30)$$

is nonincreasing. Since $K_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1}$ is weakly compact then $(K_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1})^2$ is compact (see Theorem A.3.7). Note that

$$(s(A_\infty), \infty) \ni \lambda \mapsto r_\sigma(K_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1})$$

is convex and therefore continuous (see [108] p. 107). Assume *momentarily* that

$$r_\sigma(K_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1}) > 0 \quad (\lambda > s(A_\infty)). \quad (4.31)$$

Then

$$(s(A_\infty), \infty) \ni \lambda \mapsto r_\sigma(K_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1})$$

is *strictly decreasing* (see [108] p. 106). If

$$\lim_{\lambda \rightarrow s(A_\infty)} r_\sigma(K_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1}) > 1$$

then there exists a unique

$$\bar{\lambda} > s(A_\infty)$$

such that

$$r_\sigma(K_\infty(\bar{\lambda} - A_\infty)^{-1}) = 1.$$

Since $K_\infty(\bar{\lambda} - A_\infty)^{-1}$ is positive and power compact then

$$1 = r_\sigma(K_\infty(\bar{\lambda} - A_\infty)^{-1})$$

is an isolated eigenvalue of $K_\infty(\bar{\lambda} - A_\infty)^{-1}$ associated to a nonnegative eigenfunction U so

$$K_\infty(\bar{\lambda} - A_\infty)^{-1}U = U.$$

Let

$$V := (\bar{\lambda} - A_\infty)^{-1}U.$$

Then $V \neq 0$ and

$$K_\infty V = K_\infty(\bar{\lambda} - A_\infty)^{-1}U = U = (\bar{\lambda} - A_\infty)V$$

so

$$\mathcal{A}_\infty V = \bar{\lambda}V.$$

As for the previous finite case, the weak compactness of K_∞ implies that $\{U_\infty(t)\}_{t \geq 0}$ and $\{T_\infty(t)\}_{t \geq 0}$ have the same essential type

$$\omega_{ess}(\mathcal{A}_\infty) = \omega_{ess}(A_\infty).$$

Since

$$\omega_{ess}(A_\infty) \leq s(A_\infty)$$

then

$$\omega_{ess}(\mathcal{A}_\infty) \leq s(A_\infty) < \bar{\lambda} = s(\mathcal{A}_\infty).$$

Thus $\{U_\infty(t)\}_{t \geq 0}$ exhibits a spectral gap and consequently $\{U_\infty(t)\}_{t \geq 0}$ has asynchronous exponential growth since it is irreducible. Finally, we just have to check (4.31). To this end, let $\tilde{K}_\infty \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_\infty)$ be defined by

$$\tilde{K}_\infty \begin{pmatrix} u \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^\infty \beta(\cdot, y)u(y)dy \\ 0 \end{pmatrix}$$

then let the operator $\tilde{K} \in \mathcal{L}(L^1(0, \infty))$ be such that for every $v \in L(0, \infty)$

$$\tilde{K}_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{K}v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

where $\tilde{K}v \in L^1(0, \infty) - \{0\}$ (with Equation (4.28)). We then see that

$$\sigma(\tilde{K}_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1}) = \sigma(\tilde{K}).$$

Indeed since K_∞ is weakly compact then so is \tilde{K}_∞ and $\tilde{K}_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1}$. Consequently its spectrum is punctual and $\nu \in \sigma(\tilde{K}_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1})$ if and only if there exists $(u_1, u_2) \in \mathcal{X}_\infty - \{0\}$ such that

$$\tilde{K}_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

but we know that

$$\tilde{K}_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$$

so we need to have

$$\nu u_2 = 0.$$

If $\nu = 0$ then we look for $(u_1, u_2) \in \mathcal{X}_\infty - \{0\}$ such that

$$\tilde{K}_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

which is absurd since $(\lambda - A_\infty)^{-1}$ is positivity improving and by assumption on β . Thus $\nu \in \sigma(\tilde{K}_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1})$ if and only if there exists $v \in L^1(0, \infty) - \{0\}$ such that

$$\tilde{K}_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$$

which is equivalent to

$$\nu \in \sigma(\tilde{K}).$$

Consequently

$$r_\sigma(K_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1}) \geq r_\sigma(\tilde{K}_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1}) = r_\sigma(\tilde{K}).$$

Now define the linear operator $\bar{K} \in \mathcal{L}(L^1(0, \infty))$ by

$$\bar{K}v(s) = \chi_I(s)\tilde{K}v(s)$$

where χ_I is the indicator function of I . We identify $L^1(I)$ to the closed subspace of $L^1(0, \infty)$ of functions vanishing a.e. outside I . Since

$$\bar{K} : L^1(0, \infty) \rightarrow L^1(I)$$

(using Equation (4.28)) then

$$\bar{K}|_{L^1(I)} : L^1(I) \rightarrow L^1(I)$$

and

$$\tilde{K} \geq \bar{K}|_{L^1(I)}$$

so

$$r_\sigma(\tilde{K}) \geq r_\sigma(\bar{K}|_{L^1(I)}).$$

Since $(\lambda - A_\infty)^{-1} : \mathcal{X}_\infty \rightarrow \mathcal{X}_\infty$ is positivity improving then our assumption on β imply that

$$\bar{K}|_{L^1(I)} : L^1(I) \rightarrow L^1(I)$$

is positivity improving too. Since $\bar{K}|_{L^1(I)}$ is weakly compact then $(\bar{K}|_{L^1(I)})^2$ is compact (see Theorem A.3.7) and irreducible so

$$r_\sigma(\bar{K}|_{L^1(I)}^2) > 0$$

(see Theorem A.4.7) and finally

$$r_\sigma(\bar{K}|_{L^1(I)}) > 0.$$

□

Remark 4.2.6. Note that if

$$\lim_{\lambda \rightarrow s(A_\infty)} r_\sigma(K_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1}) \leq 1$$

then $r_\sigma(K_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1}) < 1$ ($\lambda > s(A_\infty)$) and

$$(\lambda I - \mathcal{A}_\infty)^{-1} = (\lambda I - A_\infty - K_\infty)^{-1} = (\lambda I - A_\infty)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (K_\infty(\lambda I - A_\infty)^{-1})^n$$

($\forall \lambda > s(A_\infty)$) shows that $s(\mathcal{A}_\infty) \leq s(A_\infty)$. In fact $s(\mathcal{A}_\infty) = s(A_\infty)$ since $s(\mathcal{A}_\infty) \geq s(A_\infty)$ due to $K_\infty \geq 0$.

Remark 4.2.7. Roughly speaking Theorem 4.2.5 expresses that $\{U_\infty(t)\}_{t \geq 0}$ has asynchronous exponential growth once $s(\mathcal{A}_\infty) > s(A_\infty)$. We mention that the spectral bound of generators of perturbed positive semigroups is characterized in [148] (see also [143]). Note that $s(A_\infty)$ is not known explicitly. In case $s(A_\infty) = 0$, then (4.29) could be interpreted in terms of the basic reproduction number \mathcal{R}_0 (see [143]), we thank one of the referees for drawing our attention to this fact.

Remark 4.2.8. Note that $K_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1}$ and $(\lambda - A_\infty)^{-1}K_\infty$ have the same non-zero spectrum (see e.g. [1] p. 196) and consequently

$$r_\sigma(K_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1}) = r_\sigma((\lambda - A_\infty)^{-1}K_\infty).$$

On the other hand, $(\lambda - A_\infty)^{-1}K_\infty$ is never positivity improving since

$$K_\infty \begin{pmatrix} 0 \\ u_0 \end{pmatrix} = 0 \quad \forall u_0 \in \mathbb{R}.$$

We end this subsection by a useful criterion to estimate a spectral radius.

Lemma 4.2.9. *Let*

$$\beta(x, y) = \beta_1(x)\beta_2(y)$$

where $\beta_1 \in L^1(0, \infty)$ and $\beta_2 \in L^\infty(0, \infty)$. We assume that β_1 is continuous at 0. Then for every $\lambda > s(A_\infty)$

$$r_\sigma(K_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1}) = \left\| \beta_2 \left((\lambda - A_\infty)^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1(0) \end{pmatrix} \right) \right\|_{1, L^1(\mathbb{R}_+)}.$$

Proof. We know that

$$\begin{aligned} K_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1} \begin{pmatrix} f \\ f_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \beta_1(\cdot) \left\| \beta_2 \left((\lambda - A_\infty)^{-1} \begin{pmatrix} f \\ f_0 \end{pmatrix} \right) \right\|_{1, L^1} \\ \beta_1(0) \left\| \beta_2 \left((\lambda - A_\infty)^{-1} \begin{pmatrix} f \\ f_0 \end{pmatrix} \right) \right\|_{1, L^1} \end{pmatrix} \\ &= \left\| \beta_2 \left((\lambda - A_\infty)^{-1} \begin{pmatrix} f \\ f_0 \end{pmatrix} \right) \right\|_{1, L^1} \begin{pmatrix} \beta_1(\cdot) \\ \beta_1(0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

so $K_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1}$ is a one-rank operator with a single non-zero eigenvalue

$$\left\| \beta_2 \left((\lambda - A_\infty)^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1(\cdot) \\ \beta_1(0) \end{pmatrix} \right) \right\|_{1, L^1}$$

associated to eigenvector

$$\begin{pmatrix} \beta_1(\cdot) \\ \beta_1(0) \end{pmatrix}.$$

Hence

$$r_\sigma(K_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1}) = \left\| \beta_2 \left((\lambda - A_\infty)^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1(0) \end{pmatrix} \right) \right\|_{1, L^1(\mathbb{R}_+)}.$$

□

Remark 4.2.10. Note that if the kernel β is not separable but is bounded below by a separable kernel, i.e.

$$\beta(x, y) \geq \beta_1(x)\beta_2(y),$$

then a simple domination argument shows

$$r_\sigma(K_\infty(\lambda - A_\infty)^{-1}) \geq \left\| \beta_2 \left((\lambda - A_\infty)^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1(0) \end{pmatrix} \right) \right\|_{1, L^1(\mathbb{R}_+)}.$$

Simplified models (with constant coefficients) are dealt with in the next section to check the property

$$\lim_{\lambda \rightarrow s(A_\infty)} \left\| \beta_2 \left((\lambda - A_\infty)^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1(0) \end{pmatrix} \right) \right\|_{1, L^1(\mathbb{R}_+)} = \infty.$$

4.3 The constant case

4.3.1 Framework

In this section we show that the property (4.2.10) is verified in the constant case

$$d \equiv 1, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}_+.$$

We thus consider the operator

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\infty \begin{pmatrix} u \\ u_0 \end{pmatrix} &= A_\infty \begin{pmatrix} u \\ u_0 \end{pmatrix} + K_\infty \begin{pmatrix} u \\ u_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u'' - \gamma u' - \mu u \\ (b_0 - \gamma)u'(0) - \rho_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^\infty \beta(\cdot, y)u(y)dy \\ \int_0^\infty \beta_0(y)u(y)dy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

whose the domain is

$$D(\mathcal{A}_\infty) = \{(u, u_0) \in \mathcal{X}_\infty : u \in W_{loc}^{2,1}(\mathbb{R}_+), u(0) = u_0, u'' - \gamma u' \in L^1(\mathbb{R}_+) \text{ and } \lim_{s \rightarrow \infty} u'(s) - \gamma u(s) = 0\}$$

and with

$$\rho_0 = \mu + c_0.$$

We keep all hypotheses made on Section 4.2 so that we have

$$b_0 - \gamma > 0, \quad c_0 \geq 0, \quad b_0 > 0, \quad \rho_0 \geq 0. \quad (4.33)$$

4.3.2 The main result

We have the following theorem.

Theorem 4.3.1. *Let $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}_+$ be two intervals with positive lengths. We assume that*

$$\beta(x, y) \geq \beta_1(x)\beta_2(y)$$

where $\beta_1 \in L^1(0, \infty)$, $\beta_2 \in L^\infty(0, \infty)$ such that

$$\beta_1(s) > 0 \text{ a.e. } s \in I_1, \quad \beta_2(s) > 0 \text{ a.e. } s \in I_2$$

with β_1 continuous at 0. Then (4.28) is satisfied and

$$\lim_{\lambda \rightarrow s(\mathcal{A}_\infty)} \left\| \beta_2 \left((\lambda - \mathcal{A}_\infty)^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1(0) \end{pmatrix} \right) \right\|_1 = \infty. \quad (4.34)$$

Proof. The fact that (4.28) is satisfied is clear. In all the following, we will write for more convenience

$$I_1 = [x_1, x_2], \quad I_2 = [y_1, y_2].$$

Consider $\lambda > -\mu$ and solve

$$(\lambda - \mathcal{A}_\infty)^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u_0 \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

This amounts to solving the following system

$$(\lambda + \mu)u + \gamma u' - u'' = \beta_1, \quad (4.36)$$

$$u'(0) - \left(\frac{\rho_0 + \lambda}{b_0 - \gamma} \right) u_0 = -\frac{\beta_1(0)}{b_0 - \gamma}. \quad (4.37)$$

The general solution of the homogeneous equation related to (4.36) is given by

$$u(x) = \lambda_1 \exp(\xi_1(\lambda)x) + \lambda_2 \exp(\xi_2(\lambda)x),$$

where

$$\xi_1(\lambda) = \frac{(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)})}{2} \text{ and } \xi_2(\lambda) = \frac{(\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)})}{2}.$$

We look for a particular solution of (4.36) in the form

$$w(x) = \lambda_1(x)e^{\xi_1(\lambda)x} + \lambda_2(x)e^{\xi_2(\lambda)x}.$$

We set the condition

$$\lambda_1'(x)e^{\xi_1(\lambda)x} + \lambda_2'(x)e^{\xi_2(\lambda)x} = 0. \quad (4.38)$$

We get

$$w'(x) = \xi_1(\lambda)\lambda_1(x)e^{\xi_1(\lambda)x} + \xi_2(\lambda)\lambda_2(x)e^{\xi_2(\lambda)x} \quad (4.39)$$

and

$$w''(x) = \xi_1^2(\lambda)\lambda_1(x)e^{\xi_1(\lambda)x} + \xi_1(\lambda)\lambda_1'(x)e^{\xi_1(\lambda)x} + \xi_2^2(\lambda)\lambda_2(x)e^{\xi_2(\lambda)x} + \xi_2(\lambda)\lambda_2'(x)e^{\xi_2(\lambda)x}.$$

Consequently

$$(\lambda + \mu)w + \gamma w' - w'' = \beta_1$$

if and only if

$$-\xi_1(\lambda)\lambda_1'(x)e^{\xi_1(\lambda)x} - \xi_2(\lambda)\lambda_2'(x)e^{\xi_2(\lambda)x} = \beta_1(x).$$

With (4.38), we have to solve

$$\begin{cases} \lambda_1'(x)e^{\xi_1(\lambda)x} + \lambda_2'(x)e^{\xi_2(\lambda)x} = 0, \\ -\xi_1(\lambda)\lambda_1'(x)e^{\xi_1(\lambda)x} - \xi_2(\lambda)\lambda_2'(x)e^{\xi_2(\lambda)x} = \beta_1(x). \end{cases}$$

Therefore

$$\lambda_1'(x) = \frac{-\beta_1(x)e^{-\xi_1(\lambda)x}}{\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}}, \quad \lambda_2'(x) = \frac{\beta_1(x)e^{-\xi_2(\lambda)x}}{\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}}.$$

Hence a particular solution of (4.36) is

$$w(x) = \int_x^\infty \frac{\beta_1(s)e^{-\xi_1(\lambda)s}}{\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} ds e^{\xi_1(\lambda)x} + \int_0^x \frac{\beta_1(s)e^{-\xi_2(\lambda)s}}{\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} ds e^{\xi_2(\lambda)x}. \quad (4.40)$$

Consequently, the general solution of (4.36) is given by

$$u(x) = \lambda_1 e^{\xi_1(\lambda)x} + \lambda_2 e^{\xi_2(\lambda)x} + w(x).$$

Since $\lambda > -\mu$, we have $\xi_1(\lambda) > 0$ and $\xi_2(\lambda) < 0$. Therefore $w \in L^1(0, \infty)$ because $\beta_1 \in L^1(0, \infty)$. Thus

$$u \in L^1(\mathbb{R}_+) \Leftrightarrow \lambda_1 = 0,$$

and

$$u(x) = \lambda_2 e^{\xi_2(\lambda)x} + w(x).$$

Furthermore, the boundary condition (4.37) is satisfied if and only if

$$\lambda_2(\lambda)\xi_2(\lambda) = \left(\frac{\rho_0 + \lambda}{b_0 - \gamma}\right) u_0 - \frac{\beta_1(0)}{b_0 - \gamma} - \xi_1(\lambda) \int_0^\infty \frac{\beta_1(s)e^{-\xi_1(\lambda)s}}{\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} ds.$$

Then $u(0) = u_0$ if and only if

$$\begin{aligned} \lambda_2(\lambda)\xi_2(\lambda) &= \left(\frac{\rho_0 + \lambda}{b_0 - \gamma}\right) \left(\lambda_2(\lambda) + \int_0^\infty \frac{\beta_1(s)e^{-\xi_1(\lambda)s}}{\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} ds\right) \\ &\quad - \frac{\beta_1(0)}{b_0 - \gamma} - \xi_1(\lambda) \int_0^\infty \frac{\beta_1(s)e^{-\xi_1(\lambda)s}}{\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} ds \end{aligned}$$

which is equivalent to

$$\begin{aligned} \lambda_2(\lambda) &= \int_0^\infty \frac{\beta_1(s)e^{-\xi_1(\lambda)s}}{\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} ds \left(\frac{\xi_1(\lambda) - (\lambda + \rho_0)/(b_0 - \gamma)}{-\xi_2(\lambda) + (\lambda + \rho_0)/(b_0 - \gamma)} \right) \\ &\quad + \frac{\beta_1(0)/(b_0 - \gamma)}{-\xi_2(\lambda) + (\lambda + \rho_0)/(b_0 - \gamma)}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

We know that

$$\lambda + \rho_0 = \lambda + \mu + c_0 \geq c_0,$$

when $\lambda > -\mu$ so $\lambda_2(\lambda)$ is well-defined since

$$-\xi_2(\lambda) + (\lambda + \rho_0)/(b_0 - \gamma) > 0.$$

Thus, the expression of the resolvent is given by

$$u(x) = \int_x^\infty \frac{\beta_1(s)e^{-\xi_1(\lambda)s}}{\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} ds e^{\xi_1(\lambda)x} + \int_0^x \frac{\beta_1(s)e^{-\xi_2(\lambda)s}}{\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} ds e^{\xi_2(\lambda)x} + \lambda_2(\lambda)e^{\xi_2(\lambda)x},$$

where $\lambda_2(\lambda)$ is given by (4.41). We know that

$$u'(x) = \lambda_2(\lambda)\xi_2(\lambda)e^{\xi_2(\lambda)x} + w'(x).$$

Using (4.40) we verify that $w' \in L^1$ and $u' \in L^1(0, \infty)$. Moreover (4.36) proves that $u'' \in L^1$ since $\beta_1 \in L^1$. Consequently $(u, u(0))^T \in D(B)$.

Since \mathcal{A}_∞ generates a positive C_0 -semigroup on \mathcal{X}_∞ (see Section 4.2 then $s(\mathcal{A}_\infty) \in \sigma(\mathcal{A}_\infty)$ (Theorem A.4.5) and $s(\mathcal{A}_\infty) \leq -\mu$.

We now prove that $s(\mathcal{A}_\infty) = -\mu$. Suppose that $\gamma > 0$ and let $\lambda = -\mu$, then the general solution of the homogeneous equation related to (4.36) is

$$u(x) = \lambda_1 \exp(\gamma x) + \lambda_2.$$

Then a particular solution of (4.36) is given by

$$w(x) = e^{\gamma x} \int_x^\infty \frac{\beta_1(s)e^{-\gamma s}}{\gamma} ds + \int_0^x \frac{\beta_1(s)}{\gamma} ds$$

and the general solution of (4.36) is

$$u(x) = \lambda_1 e^{\gamma x} + \lambda_2 + w(x).$$

Let us note

$$l := \lim_{x \rightarrow \infty} w(x).$$

Then we see that

$$l = \int_0^\infty \frac{\beta_1(s)}{\gamma} ds < \infty.$$

Moreover, $l > 0$ by assumption on β_1 so w is *not* in $L^1(\mathbb{R}_+)$.

If $\lambda_1 > 0$ then

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = \infty$$

and if $\lambda_1 < 0$ then we have

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = -\infty.$$

In both cases, u is *not* in $L^1(\mathbb{R}_+)$ (otherwise the limit should be zero). If $\lambda_1 = 0$ then

$$u(x) = \lambda_2 + w(x)$$

which is *not* in $L^1(\mathbb{R}_+)$ whatever $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Consequently there is no solution of (4.35) for $\lambda = -\mu$, so

$$-\mu \in \sigma(\mathcal{A}_\infty)$$

and

$$s(\mathcal{A}_\infty) = -\mu.$$

Suppose that $\gamma = 0$ and let $\lambda = -\mu$, then the general solution of the homogeneous equation related to (4.36) is

$$u(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x.$$

We look for a particular solution of (4.36) in the form

$$w(x) = \lambda_1(x) + \lambda_2(x)x.$$

We set the condition

$$\lambda_1'(x) + \lambda_2'(x)x = 0$$

so we get

$$w'(x) = \lambda_2(x)$$

and

$$w''(x) = \lambda_2'(x).$$

Consequently

$$-w'' = \beta_1$$

if and only if

$$\lambda_2'(x) = -\beta_1(x).$$

So we get

$$\lambda_1'(x) = \beta_1(x)x, \quad \lambda_2'(x) = -\beta_1(x).$$

Hence a particular solution of (4.36) is

$$w(x) = \int_0^x s\beta_1(s)ds + x \int_x^\infty \beta_1(s)ds$$

and the general solution of (4.36) is given by

$$u(x) = \lambda_1 + \lambda_2x + w(x).$$

We see that

$$u'(x) = \lambda_2 + \int_x^\infty \beta_1(s)ds$$

which implies

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u'(x) = \lambda_2,$$

so, to have $(u, u(0))^T \in D(\mathcal{A}_\infty)$, we must have

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u'(x) = 0$$

which is equivalent to

$$\lambda_2 = 0.$$

We thus get

$$u(x) = \lambda_1 + \int_0^x s\beta_1(s)ds + x \int_x^\infty \beta_1(s)ds$$

so

$$u(0) = \lambda_1$$

and

$$u'(0) = \int_0^\infty \beta_1(s)ds$$

so the boundary condition (4.37) is verified if and only if

$$u'(0) - \left(\frac{\rho_0}{b_0}\right)u(0) = -\frac{\beta_1(0)}{b_0}$$

which is equivalent to

$$\int_0^\infty \beta_1(s)ds - \frac{\lambda_1\rho_0}{b_0} = -\frac{\beta_1(0)}{b_0}.$$

If $\rho_0 = 0$ then we get

$$0 < \int_0^\infty \beta_1(s)ds = -\frac{\beta_1(0)}{b_0} \leq 0$$

which is impossible. If $\rho_0 > 0$ then we get

$$\lambda_1 = \left(\int_0^\infty \beta_1(s)ds + \frac{\beta_1(0)}{b_0}\right) \frac{b_0}{\rho_0} > 0.$$

Consequently

$$u(x) \geq \lambda_1 > 0$$

for every $x \geq 0$ and u is *not* in $L^1(\mathbb{R}_+)$ so

$$-\mu \in \sigma(\mathcal{A}_\infty)$$

and

$$s(\mathcal{A}_\infty) = -\mu.$$

Now suppose that $\gamma < 0$ and let $\lambda \in (-\gamma^2/4 - \mu, -\mu)$ close enough to $-\mu$. Then the general solution of the homogeneous equation related to (4.36) is

$$u(x) = \lambda_1 e^{\xi_1(\lambda)x} + \lambda_2 e^{\xi_2(\lambda)x},$$

with $\xi_1(\lambda) < 0$ and $\xi_2(\lambda) < 0$. A particular solution w of (4.36) is given by (4.40). Consequently the general solution of (4.36) is given by

$$u(x) = \lambda_1 e^{\xi_1(\lambda)x} + \lambda_2 e^{\xi_2(\lambda)x} + w(x). \quad (4.42)$$

We can verify that $w \in L^1(0, \infty)$. Since $\xi_1(\lambda) < 0$ and $\xi_2(\lambda) < 0$ then $u \in L^1(0, \infty)$. Furthermore, the boundary condition (4.37) is satisfied if and only if

$$\lambda_1(\lambda)\xi_1(\lambda) + \lambda_2(\lambda)\xi_2(\lambda) = \left(\frac{\rho_0 + \lambda}{b_0 - \gamma}\right) u_0 - \frac{\beta_1(0)}{b_0 - \gamma} - \xi_1(\lambda) \int_0^\infty \frac{\beta_1(s)e^{-\xi_1(\lambda)s}}{\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} ds.$$

Then $u(0) = u_0$ if and only if

$$\begin{aligned} \lambda_1(\lambda)\xi_1(\lambda) + \lambda_2(\lambda)\xi_2(\lambda) &= \left(\frac{\rho_0 + \lambda}{b_0 - \gamma}\right) \left(\lambda_1(\lambda) + \lambda_2(\lambda) + \int_0^\infty \frac{\beta_1(s)e^{-\xi_1(\lambda)s}}{\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} ds \right) \\ &\quad - \frac{\beta_1(0)}{b_0 - \gamma} - \xi_1(\lambda) \int_0^\infty \frac{\beta_1(s)e^{-\xi_1(\lambda)s}}{\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} ds \end{aligned}$$

which is equivalent to

$$\begin{aligned} \lambda_2(\lambda) &= \int_0^\infty \frac{\beta_1(s)e^{-\xi_1(\lambda)s}}{\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} ds \left(\frac{\xi_1(\lambda) - (\lambda + \rho_0)/(b_0 - \gamma)}{-\xi_2(\lambda) + (\lambda + \rho_0)/(b_0 - \gamma)} \right) \\ &\quad + \frac{\beta_1(0)/(b_0 - \gamma)}{-\xi_2(\lambda) + (\lambda + \rho_0)/(b_0 - \gamma)} + \frac{\lambda_1(\lambda) [\xi_1(\lambda) - (\rho_0 + \lambda)/(b_0 - \gamma)]}{-\xi_2(\lambda) + (\lambda + \rho_0)/(b_0 - \gamma)}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Since the function

$$\lambda \mapsto -\xi_2(\lambda) + \frac{\lambda + \rho_0}{b_0 - \gamma}$$

is continuous, strictly increasing on $(-\gamma^2/4 - \mu, \infty)$ and equals to

$$-\gamma + \frac{\rho_0}{b_0 - \gamma} > 0$$

when $\lambda = -\mu$, then, taking $\lambda < -\mu$ close enough to $-\mu$ we get

$$-\xi_2(\lambda) + (\lambda + \rho_0)/(b_0 - \gamma) > 0.$$

Consequently, for any $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, the function given by (4.42) is solution of (4.36) and is solution of (4.37) when $\lambda_2(\lambda)$ satisfies (4.43). Therefore we get an infinite number of solutions of (4.35) for every $\lambda < -\mu$ close enough to $-\mu$ so

$$-\mu \in \sigma(\mathcal{A}_\infty)$$

and

$$s(\mathcal{A}_\infty) = -\mu.$$

Now consider $\lambda > -\mu$. Then we first see that

$$\xi_1(\lambda) > \xi_2(\lambda).$$

So we have

$$\xi_1(\lambda) - (\lambda + \rho_0)/(b_0 - \gamma) > \xi_2(\lambda) - (\lambda + \rho_0)/(b_0 - \gamma).$$

Since

$$\xi_2(\lambda) - (\lambda + \rho_0)/b_0 < 0,$$

we get

$$\left(\frac{\xi_1 - (\lambda + \rho_0)/b_0}{-\xi_2 + (\lambda + \rho_0)/b_0} \right) > -1. \quad (4.44)$$

A computation gives

$$\begin{aligned} & \left\| \beta_2 \left((\lambda - A)^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1(0) \end{pmatrix} \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} = \int_0^\infty \frac{\beta_1(s)e^{-\xi_1(\lambda)s}}{\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} \int_0^s \beta_2(x)e^{\xi_1(\lambda)x} dx ds \\ & + \int_0^\infty \frac{\beta_1(s)e^{-\xi_2(\lambda)s}}{\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} \int_s^\infty \beta_2(x)e^{\xi_2(\lambda)x} dx ds + \lambda_2(\lambda) \int_0^\infty \beta_2(x)e^{\xi_2(\lambda)x} dx. \end{aligned}$$

Using (4.41)-(4.44), we get the lower bound

$$\begin{aligned} & \left\| \beta_2 \left((\lambda - A)^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1(0) \end{pmatrix} \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \\ & \geq \frac{\beta_1(0)/b_0}{-\xi_2(\lambda) + (\lambda + \rho_0)/b_0} \int_0^\infty \beta_2(x)e^{\xi_2(\lambda)x} dx + \int_0^\infty \frac{\beta_1(s)}{\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} \times \\ & \left[e^{-\xi_1(\lambda)s} \int_0^s (e^{\xi_1(\lambda)x} - e^{\xi_2(\lambda)x}) \beta_2(x) dx + (e^{-\xi_2(\lambda)s} - e^{-\xi_1(\lambda)s}) \int_s^\infty e^{\xi_2(\lambda)x} \beta_2(x) dx \right] ds. \end{aligned}$$

Suppose that $x_1 > y_1$. Then we use the lower bound

$$\begin{aligned} & \left\| \beta_2 \left((\lambda - A)^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1(0) \end{pmatrix} \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \\ & \geq \int_{x_1}^{x_2} \frac{\beta_1(s)}{\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} e^{-\xi_1 s} \int_{y_1}^{\min(x_1, y_2)} (e^{\xi_1 x} - e^{\xi_2 x}) \beta_2(x) dx ds. \end{aligned}$$

Furthermore, we know that

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\mu} \xi_1(\lambda) = 0 \text{ if } \gamma \geq 0 \text{ and } \lim_{\lambda \rightarrow -\mu} |\xi_2(\lambda)| = 0 \text{ if } \gamma < 0.$$

Consequently for $x \in [y_1, \min(x_1, y_2)]$ we use the lower bounds

$$(e^{\xi_1(\lambda)x} - e^{\xi_2(\lambda)x})\beta_2(x) \geq \begin{cases} M_1 e^{\xi_1(\lambda)x} & \text{if } \gamma \geq 0, \\ M_2 e^{\xi_2(\lambda)x} & \text{if } \gamma < 0, \end{cases}$$

where $M_1, M_2 > 0$ are positive constants since $\beta_2 > 0$ on $[y_1, y_2]$ and $\xi_1(\lambda) > \xi_2(\lambda)$.
If $\gamma \geq 0$ then

$$\begin{aligned} & \left\| \beta_2 \left((\lambda - A)^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1(0) \end{pmatrix} \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \\ & \geq M_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\beta_1(s)}{\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} e^{-\xi_1(\lambda)s} \int_{y_1}^{\min\{x_1, y_2\}} e^{\xi_1(\lambda)x} dx ds \\ & \geq M_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\beta_1(s)}{\xi_1(\lambda)\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} e^{-\xi_1(\lambda)s} \left(e^{\xi_1(\lambda)\min\{x_1, y_2\}} - e^{\xi_1(\lambda)y_1} \right) ds \\ & \geq \overline{M}_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\beta_1(s)e^{-\xi_1(\lambda)s}}{\xi_1(\lambda)\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} ds \\ & \geq \frac{\overline{M}_1 C}{\xi_1(\lambda)} \end{aligned}$$

where $\overline{M}_1, C > 0$ are positive constants because $\beta_1 > 0$ on $[x_1, x_2]$. Since $\xi_1(\lambda) > 0$ for $\lambda > -\mu$ and $\lim_{\lambda \rightarrow -\mu} \xi_1(\lambda) = 0$ then

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{\overline{M}_1 C}{\xi_1(\lambda)} \right) = \infty$$

and we get

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\mu} \left\| \beta_2 \left((\lambda - A)^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1(0) \end{pmatrix} \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} = \infty.$$

If $\gamma < 0$ then, since $\xi_2(\lambda) < 0$ for $\lambda > -\mu$, we get

$$\begin{aligned} & \left\| \beta_2 \left((\lambda - A)^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1(0) \end{pmatrix} \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \\ & \geq M_2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\beta_1(s)}{\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} e^{-\xi_1(\lambda)s} \int_{y_1}^{\min\{x_1, y_2\}} e^{\xi_2(\lambda)x} dx ds \\ & \geq M_2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\beta_1(s)}{|\xi_2(\lambda)|\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} e^{-\xi_1(\lambda)s} \left(e^{\xi_2(\lambda)y_1} - e^{\xi_2(\lambda)\min\{x_1, y_2\}} \right) ds \\ & \geq \overline{M}_2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\beta_1(s)e^{-\xi_1(\lambda)s}}{|\xi_2(\lambda)|\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} ds \\ & \geq \frac{\overline{M}_2 C}{\xi_2(\lambda)} \end{aligned}$$

where $\overline{M}_2, C > 0$ are positive constants. Since $\lim_{\lambda \rightarrow -\mu} |\xi_2(\lambda)| = 0$ then

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\mu} \left(\frac{\overline{M}_2 C}{\xi_2(\lambda)} \right) = \infty$$

and we get

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\mu} \left\| \beta_2 \left((\lambda - A)^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1(0) \end{pmatrix} \right) \right\|_{1, L^1(\mathbb{R}_+)} = \infty.$$

Now, suppose that $x_1 \leq y_1$. Then

$$\begin{aligned} & \left\| \beta_2 \left((\lambda - A)^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1(0) \end{pmatrix} \right) \right\|_{1, L^1(\mathbb{R}_+)} \\ & \geq \int_0^\infty \frac{\beta_1(s)}{\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} \left(e^{-\xi_2(\lambda)s} - e^{-\xi_1(\lambda)s} \right) \int_s^\infty e^{\xi_2(\lambda)x} \beta_2(x) dx ds \\ & \geq \int_0^\infty \frac{\beta_2(x) e^{\xi_2(\lambda)x}}{\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} \int_0^x \beta_1(s) \left(e^{-\xi_2(\lambda)s} - e^{-\xi_1(\lambda)s} \right) ds dx \\ & \geq \int_{(y_1+y_2)/2}^{y_2} \frac{\beta_2(x) e^{\xi_2(\lambda)x}}{\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} \int_{x_1}^{\min\{(y_1+y_2)/2, x_2\}} \beta_1(s) \left(e^{-\xi_2(\lambda)s} - e^{-\xi_1(\lambda)s} \right) ds dx. \end{aligned}$$

Furthermore, we know that

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\mu} \xi_1(\lambda) = 0 \text{ if } \gamma \geq 0 \text{ and } \lim_{\lambda \rightarrow -\mu} |\xi_2(\lambda)| = 0 \text{ if } \gamma < 0.$$

Consequently for $s \in [x_1, \min\{(y_1 + y_2)/2, x_2\}]$ we use the lower bounds

$$\beta_1(s) \left(e^{-\xi_2(\lambda)s} - e^{-\xi_1(\lambda)s} \right) \geq \begin{cases} M_1 e^{-\xi_1(\lambda)s} & \text{if } \gamma \geq 0, \\ M_2 e^{-\xi_2(\lambda)s} & \text{if } \gamma < 0, \end{cases}$$

where $M_1, M_2 > 0$ are positive constants since $\beta_1 > 0$ on $[x_1, x_2]$ and $-\xi_2(\lambda) > -\xi_1(\lambda)$. If $\gamma \geq 0$ then

$$\begin{aligned} & \left\| \beta_2 \left((\lambda - A)^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1(0) \end{pmatrix} \right) \right\|_{1, L^1(\mathbb{R}_+)} \\ & \geq M_1 \int_{(y_1+y_2)/2}^{y_2} \frac{\beta_2(x)}{\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} e^{\xi_2(\lambda)x} \int_{x_1}^{\min\{(y_1+y_2)/2, x_2\}} e^{-\xi_1(\lambda)s} ds dx \\ & \geq M_1 \int_{(y_1+y_2)/2}^{y_2} \frac{\beta_2(x)}{\xi_1(\lambda) \sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} e^{\xi_2(\lambda)x} \left(e^{-\xi_1(\lambda)x_1} - e^{-\xi_1(\lambda) \min\{(y_1+y_2)/2, x_2\}} \right) dx \\ & \geq \overline{M}_1 \int_{(y_1+y_2)/2}^{y_2} \frac{\beta_2(x) e^{\xi_2(\lambda)x}}{\xi_1(\lambda) \sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} dx \\ & \geq \frac{\overline{M}_1 C}{\xi_1(\lambda)} \end{aligned}$$

where $\overline{M}_1, C > 0$ are positive constants because $\beta_2 > 0$ on $[y_1, y_2]$. Since $\xi_1(\lambda) > 0$ for $\lambda > -\mu$ and $\lim_{\lambda \rightarrow -\mu} \xi_1(\lambda) = 0$ then

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\mu} \left(\frac{\overline{M}_1 C}{\xi_1(\lambda)} \right) = \infty$$

and we get

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\mu} \left\| \beta_2 \left((\lambda - A)^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1(0) \end{pmatrix} \right) \right\|_{1, L^1(\mathbb{R}_+)} = \infty.$$

If $\gamma < 0$ then, since $\xi_2(\lambda) < 0$ for $\lambda > 0$, we get

$$\begin{aligned}
 & \left\| \beta_2 \left((\lambda - A)^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1(0) \end{pmatrix} \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \\
 & \geq M_2 \int_{(y_1+y_2)/2}^{y_2} \frac{\beta_2(x)}{\sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} e^{\xi_2(\lambda)x} \int_{x_1}^{\min\{(y_1+y_2)/2, x_2\}} e^{-\xi_2(\lambda)s} ds dx \\
 & \geq M_2 \int_{(y_1+y_2)/2}^{y_2} \frac{\beta_2(x)}{|\xi_2(\lambda)| \sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} e^{\xi_2(\lambda)x} \left(e^{-\xi_2(\lambda) \min\{(y_1+y_2)/2, x_2\}} - e^{-\xi_2(\lambda)x_1} \right) dx \\
 & \geq \overline{M}_2 \int_{(y_1+y_2)/2}^{y_2} \frac{\beta_2(x) e^{\xi_2(\lambda)x}}{|\xi_2(\lambda)| \sqrt{\gamma^2 + 4(\lambda + \mu)}} dx \\
 & \geq \frac{\overline{M}_2 C}{|\xi_2(\lambda)|}
 \end{aligned}$$

where $\overline{M}_2, C > 0$ are positive constants. Since $\lim_{\lambda \rightarrow -\mu} |\xi_2(\lambda)| = 0$ then

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\mu} \left(\frac{\overline{M}_2 C}{|\xi_2(\lambda)|} \right) = \infty$$

and

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\mu} \left\| \beta_2 \left((\lambda - A)^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1(0) \end{pmatrix} \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} = \infty.$$

□

Remark 4.3.2. In this case we can thus use Theorem 4.2.5 to get the asynchronous exponential growth of the semigroup generated by the operator \mathcal{A}_∞ . Note that we took $d \equiv 1$ for convenience but we can take $d \in \mathbb{R}_+^*$ as well. The boundary condition (4.37) will be the same. However the Equation (4.36) will become

$$(\lambda + \mu)u + \gamma u' - du'' = \beta_1$$

then it suffices to divide by $d > 0$ to get

$$\left(\frac{\lambda}{d} + \frac{\mu}{d} \right) u + \frac{\gamma u'}{d} - u'' = \frac{\beta_1}{d}$$

and with some change of variables we get exactly what we studied before, that is :

$$(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})u + \tilde{\gamma}u' - u'' = \tilde{\beta}_1.$$

Troisième partie
Étude d'équations à retard

Chapitre 5

Global stability in a delay predator-prey model

5.1 Framework

5.1.1 System and equilibria

In this chapter we continue the study of the predator-prey model (2.1). The goal of this work is to prove the convergence to the non trivial equilibrium (see Figure 2.3) in some case. More exactly, we consider

$$\mu \equiv \mu_0 > 0, \quad \beta(a) = \beta_0 \chi_{[\tau, \infty)}(a), \quad \gamma(a) = \gamma_0 \chi_{[\tau, \infty)}(a),$$

where $\tau > 0$ is some delay. We readily see that in that case we get

$$a_1 = \tau, \quad R_- = 0, \quad R_0 = \frac{\beta_0 e^{-\mu_0 \tau}}{\mu_0}.$$

The behavior of the solution when $R_0 < 1$ is clear (see Theorem 2.3.5) : both populations go extinct. We thus suppose in the following that

$$R_0 > 1.$$

Formal integrations of the PDE equation in (2.1) (we suppose that $\lim_{a \rightarrow \infty} x(t, a) = 0$) implies that

$$\begin{cases} X'(t) &= x(t, \tau) - \mu_0 X(t) - \gamma_0 y(t) X(t), \\ Z'(t) &= x(t, 0) - x(t, \tau) - \mu_0 Z(t), \\ y'(t) &= \alpha \gamma_0 y(t) X(t) - \delta y(t), \end{cases}$$

where $X(t) = \int_{\tau}^{\infty} x(t, a) da$ and $Z(t) = \int_0^{\tau} x(t, a) da$. Using the boundary condition we get

$$\begin{cases} X'(t) &= \beta_0 e^{-\mu_0 \tau} X(t - \tau) - \mu_0 X(t) - \gamma_0 y(t) X(t), \\ Z'(t) &= \beta_0 X(t) - \beta_0 e^{-\mu_0 \tau} X(t - \tau) - \mu_0 Z(t), \\ y'(t) &= \alpha \gamma_0 y(t) X(t) - \delta y(t). \end{cases}$$

Since the function Z can be deduce from X and y , we will then study the following delay differential system

$$\begin{cases} X'(t) &= \beta_0 e^{-\mu_0 \tau} X(t - \tau) - \mu_0 X(t) - \gamma_0 X(t) y(t), \\ y'(t) &= \alpha \gamma_0 X(t) y(t) - \delta y(t). \end{cases} \quad (5.1)$$

Let the Banach space

$$\mathcal{X} = \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$$

endowed with the norm

$$\|(u, v)\|_{\mathcal{X}} = \|u\|_{\infty} + |v|$$

and let \mathcal{X}_+ be his nonnegative cone. We study (5.1) with the initial condition

$$X(\theta) = \phi(\theta), \quad -\tau \leq \theta \leq 0, \quad y(0) = y_0,$$

where $(\phi, y_0) \in \mathcal{X}$.

Remark 5.1.1. The delay differential system (5.1) is only deduced from the PDE model (2.1). The equivalence is only true if the initial condition (ϕ, y_0) also satisfies (2.1). In the following, we will work in the general case and then get our desired result for the particular initial condition which allows to return to the PDE model.

The equilibria of (5.1) are given by

$$E_0 := (0, 0); \quad E^* := (X^*, y^*) = \left(\frac{\delta}{\alpha\gamma_0}, \frac{\beta_0 e^{-\mu_0\tau} - \mu_0}{\gamma_0} \right).$$

We verify that E^* exists (in the positive orthant) if and only if $R_0 > 1$ and the nontrivial equilibrium is unique under this latter condition.

5.1.2 Partition of \mathcal{X}_+

Consider the sets

$$S_0 = \{(\phi, y) \in \mathcal{X}_+ : \int_{-\tau}^0 \phi(a) da > 0\}, \quad \partial S_0 = \mathcal{X}_+ \setminus S_0,$$

$$S_1 = \{(\phi, y) \in \mathcal{X}_+ : \phi(a) > 0 \text{ for every } a \in [-\tau, 0]\},$$

$$S_2 = \{(\phi, y) \in \mathcal{X}_+ : y > 0, \int_{-\tau}^0 \phi(a) da > 0\}, \quad \partial S_2 = \mathcal{X}_+ \setminus S_2,$$

$$S_3 = \{(\phi, y) \in \mathcal{X}_+ : y > 0, \phi(a) > 0 \forall a \in [-\tau, 0]\}.$$

Remark 5.1.2. We have the inclusions

$$S_3 \subset S_2 \subset S_0, \quad S_3 \subset S_1 \subset S_0$$

and we get the partition

$$\mathcal{X}_+ = S_2 \sqcup (\partial S_2 \cap S_0) \sqcup (\partial S_2 \cap \partial S_0)$$

(disjoint unions) which is in fact

$$\mathcal{X}_+ = S_2 \sqcup (\partial S_2 \cap S_0) \sqcup \partial S_0$$

since $\partial S_0 \subset \partial S_2$.

5.1.3 Preliminary results

Remark 5.1.3. We see that the initial-value problem (5.1) can be rewritten in a more convenient way

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix}'(t) = f(X_t, y(t)), t \geq 0 \\ X_0 = \phi, \quad y(0) = y_0 \end{cases} \quad (5.2)$$

where $(\phi, y_0) \in \mathcal{X}$ and $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^2$ is defined by

$$f(\phi, y) = \begin{pmatrix} \beta_0 e^{-\mu_0 \tau} \phi(-\tau) - \mu_0 \phi(0) - \gamma_0 \phi(0) y \\ \alpha \gamma_0 \phi(0) y - \delta y \end{pmatrix},$$

and where

$$X_t(\theta) := x(t + \theta), \quad -\tau \leq \theta \leq 0.$$

(We omit the initial condition dependence since there is no misunderstanding and we write $X_t(\theta)$ instead of $X_t(\theta, z_0)$, where $z_0 := (\phi, y_0)$).

Proposition 5.1.4. *For every initial condition $z_0 := (\phi, y_0) \in \mathcal{X}_+$, Problem (5.2) has a unique mild solution $(X_t, y(t))$ for every $t \geq 0$.*

Moreover, Problem (5.2) induces a continuous semiflow via :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{X}_+ &\rightarrow \mathcal{X}_+ \\ (t, z_0) &\mapsto \Phi_t(z_0) := (X_t, y(t)). \end{aligned}$$

Proof. The proposition results from the general case proved in Proposition 2.3.9. \square

Remark 5.1.5. Consequently of the latter proposition, the solution stay in the nonnegative cone and there is no explosion in finite time.

Definition 5.1.6. Let $S, T \subset \mathcal{X}$, then in all the following we will say that S is

1. **positively invariant** if $\Phi_t(S) \subset S$ for $t \geq 0$, i.e. for every $z \in S$ and every $t \geq 0$, $\Phi_t(z) \in S$.
2. **(ε, T) -positively invariant** (with $\varepsilon \geq 0$) if for every $z \in S$, then $\Phi_t(z) \in T$ for every $t \geq \varepsilon$.

Remark 5.1.7. In all the following, we will denote by $(X_t, y(t)) \in \mathcal{X}$ the solution of (5.2) at time $t \geq 0$ with initial condition $(\phi, y_0) \in \mathcal{X}$.

We now give some properties about the sets defined in Section 5.1.2, with first a useful lemma.

Lemma 5.1.8. *Let $(\phi, y_0) \in \mathcal{X}_+$ be a nonnegative initial condition. Suppose that there exists $t^* \in [-\tau, 0]$ such that $\phi(t^*) > 0$ then $X(t^* + \tau) > 0$.*

Proof. By contradiction, suppose that $X(t^* + \tau) = 0$ then Equation (5.1) implies

$$X'(t^* + \tau) = \beta_0 e^{-\mu_0 \tau} X(t^*) > 0$$

which contradicts the nonnegativity of X . \square

Proposition 5.1.9.

1. The sets S_1 and S_3 are positively invariant.
2. The set S_0 (resp S_2) is $(2\tau, S_1)$ -positively invariant (resp $(2\tau, S_3)$). Consequently, all the asymptotic results proved for initial conditions in S_3 can be extended to S_2 .
3. The set ∂S_0 is positively invariant and the equilibrium E_0 is globally asymptotically exponentially stable for Φ restricted to $\mathbb{R}_+ \times \partial S_0$.
4. The set ∂S_2 is positively invariant. Moreover, if we take the restriction of Φ to the set $\mathbb{R}_+ \times S_0 \cap \partial S_2$ then the solution (X, y) of Problem (5.1) diverges to $(\infty, 0)$ when $t \rightarrow \infty$.

Proof.

1. Consider an initial condition $(\phi, y_0) \in S_1$. Then $X_0 = \phi$ and $X(t) > 0$ for every $t \in [-\tau, 0]$. Then Lemma 5.1.8 implies that $X(t) > 0$ for $t \in [0, \tau]$. Repeating this argument, we get $X(t) > 0$ for every $t \geq -\tau$. Consequently S_1 is positively invariant. We easily see that S_3 is positively invariant, since $y'(t) \geq -\delta y(t)$ and

$$y(t) \geq y_0 e^{-\delta t} > 0, \quad t \geq 0$$

when $(\phi, y_0) \in S_3$.

2. Take an initial condition $(\phi, y_0) \in S_0$. We then have $\int_{-\tau}^0 \phi(a) da > 0$ so there exists $t^* \in [-\tau, 0]$ such that $\phi(t^*) > 0$. Using Lemma 5.1.8, we get $X(t^* + \tau) > 0$. Then, for every $t \in [t^* + \tau, 2\tau]$, we have

$$X'(t) \geq -(\mu_0 + \gamma_0 y(t))X(t).$$

Consequently for every $t \in [t^* + \tau, 2\tau]$, we get

$$X(t) \geq X(t^* + \tau) e^{-(\mu_0 + \gamma_0 \bar{y})[t - (t^* + \tau)]} > 0,$$

where $\bar{y} = \max_{t \in [t^* + \tau, 2\tau]} y(t) < \infty$ (using Remark 5.1.5).

Then $X(t) > 0$ for every $t \in [\tau, 2\tau]$ and $(X_{2\tau}, y(2\tau)) \in S_1$. Since S_1 is positively invariant, then S_0 is $(2\tau, S_1)$ -positively invariant and we easily see that S_2 is $(2\tau, S_3)$ -positively invariant.

3. Consider an initial condition $(\phi, y_0) \in \partial S_0$. We have $\int_{-\tau}^0 \phi(a) da = 0$ and $X(t) = 0$ for every $t \in [-\tau, 0]$. Then we get

$$X'(t) = -\mu_0 X(t) - \gamma_0 X(t) y(t) \leq 0, \quad t \in [0, \tau],$$

so X is nonincreasing on $[0, \tau]$. Since X is nonnegative, then $X(t) = 0$ for every $t \in [0, \tau]$. Repeating this argument, we get $X(t) = 0$ for every $t \geq 0$. We readily see that

$$\int_{-\tau}^0 X_t(\theta) d\theta = 0$$

for every $t \geq 0$ and ∂S_0 is positively invariant. It is then clear that the solution will converge to E_0 since $X(t) = 0$ for every $t \geq 0$ and $y'(t) \leq -\delta y(t)$ so $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.

4. We know that $\partial S_2 \cap \partial S_0 = \partial S_0$ is positively invariant. Consider an initial condition $(\phi, y_0) \in \partial S_2 \cap S_0$ so $y_0 = 0$ and $\int_{-\tau}^0 \phi(a) da > 0$. Then Equation (5.1) implies that $y(t) = 0$ for every $t \geq 0$. Since S_0 is positively invariant, we get the invariance of $\partial S_2 \cap S_0$ and ∂S_2 .

Moreover, with the second and third points, we have $\Phi_t(\phi, y_0) \in S_1 \cap \partial S_2$ for every $t \geq 2\tau$. Thus, for every $t \geq \tau$, $x(t) > 0$. We see that (5.1) becomes the delayed Malthusian equation

$$X'(t) = \beta_0 e^{-\mu_0 \tau} X(t - \tau) - \mu_0 X(t).$$

As explained in [85, section I.2], the solution behaves as

$$X(t) = c_0 e^{\alpha^* t} (1 + \Omega(t)), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Omega(t) = 0,$$

where $c_0 > 0$ and $\alpha^* > 0$ since $R_0 > 1$. Consequently we get

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \infty.$$

□

5.2 Attractiveness

5.2.1 Some definitions

Since for every initial condition $z \in S_2$, the ω -limit set of z is a subset of \mathcal{X} , we will need the following notations

$$\begin{aligned} \overline{E}_0 &:= (0, 0) \in \mathcal{X}, \\ \overline{E}^* &:= (X^* \chi_{[-\tau, 0]}, y^*) \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

We aim to prove that the nontrivial equilibrium satisfy a global stability property. To avoid some confusion between stability and attractiveness, some definitions are reminded in Section 1.4.1. We first want to prove the global attractiveness of E^* on some subset $S \subset \mathcal{X}$. To achieve that goal, we use Lyapunov functions. Consider the key function (see e.g. [118])

$$g(x) = x - \ln(x) - 1,$$

then define the following function

$$L_*(\phi, y) = V_1(\phi, y) + V_2(\phi, y) + V_3(\phi, y)$$

formally defined for $(\phi, y) \in \mathcal{X}$ by

$$\begin{aligned} V_1(\phi, y) &= \alpha X^* g\left(\frac{\phi(0)}{X^*}\right), \\ V_2(\phi, y) &= y^* g\left(\frac{y}{y^*}\right), \\ V_3(\phi, y) &= \alpha \beta_0 e^{-\mu_0 \tau} X^* \int_{-\tau}^0 g\left(\frac{\phi(s)}{X^*}\right) ds, \end{aligned}$$

(see e.g. [146] and also [81] where the Volterra-type Lyapunov functional V_3 was introduced).

5.2.2 Lyapunov function

In order to prove that L_* is a Lyapunov function, we first give a well-posedness result and remind the definition of a Lyapunov function for the semiflow Φ in the case of infinite dimensional systems.

Proposition 5.2.1. *The function $(t, w) \mapsto L_*(\Phi_t(w))$ is well-defined on $\mathbb{R}_+ \times S_3$ whenever $R_0 > 1$.*

Proof. Note that the condition $R_0 > 1$ is necessary to define L_* since the equilibrium E^* only exists in this case. Moreover, the positive invariance of the set S_3 (Proposition 5.1.9) proves that V_1, V_2 and V_3 are well defined when applied to the semiflow Φ . \square

Now we can give the main result of this section.

Proposition 5.2.2. *L_* is a Lyapunov function on S_3 .*

Proof. L_* is well defined on S_3 (Proposition 5.2.1) and is clearly continuous. Let $z := (\phi, y_0) \in S_3$. We can compute the derivative of L_*

$$\begin{aligned} & \partial_t[L_*(\Phi_t(z))] \\ &= \partial_t \left[\alpha X^* g \left(\frac{X(t)}{X^*} \right) + y^* g \left(\frac{y(t)}{y^*} \right) + V_3(\Phi_t(\phi, y_0)) \right] \\ &= \alpha \left(1 - \frac{X^*}{x(t)} \right) X'(t) + \left(1 - \frac{y^*}{y(t)} \right) y'(t) + \partial_t[V_3(\Phi_t(\phi, y_0))]. \end{aligned}$$

We see that

$$\frac{d}{dt} \left[g \left(\frac{X(t+s)}{X^*} \right) \right] = \frac{d}{ds} \left[g \left(\frac{X(t+s)}{X^*} \right) \right]$$

so

$$\begin{aligned} \partial_t[V_3(\Phi_t(\phi, y_0))] &= \alpha\beta_0 e^{-\mu_0\tau} X^* \int_{-\tau}^0 \frac{d}{dt} \left[g \left(\frac{X(t+s)}{X^*} \right) \right] ds \\ &= \alpha\beta_0 e^{-\mu_0\tau} X^* \int_{-\tau}^0 \frac{d}{ds} \left[g \left(\frac{X(t+s)}{X^*} \right) \right] ds \\ &= \alpha\beta_0 e^{-\mu_0\tau} X^* \left[g \left(\frac{X(t)}{X^*} \right) - g \left(\frac{xX(t-\tau)}{x^*} \right) \right]. \end{aligned}$$

Consequently we have

$$\begin{aligned} & \partial_t[L_*(\Phi_t(\phi, y_0))] \\ &= \alpha \left(1 - \frac{X^*}{X(t)} \right) [\beta_0 e^{-\mu_0\tau} X(t-\tau) - \mu_0 X(t) - \gamma_0 y(t) X(t)] \\ & \quad + \left(1 - \frac{y^*}{y(t)} \right) [\alpha\gamma_0 X(t) y(t) - \delta y(t)] + \alpha\beta_0 e^{-\mu_0\tau} X^* \left[g \left(\frac{X(t)}{X^*} \right) - g \left(\frac{X(t-\tau)}{X^*} \right) \right] \\ &= \alpha \left(1 - \frac{X^*}{X(t)} \right) [\beta_0 e^{-\mu_0\tau} X(t-\tau) - \mu_0 X(t)] + \alpha\gamma_0 y(t) X^* - \left(1 - \frac{y^*}{y(t)} \right) \delta y(t) \\ & \quad - \alpha\gamma_0 X(t) y^* + \alpha\beta_0 e^{-\mu_0\tau} \left[X(t) - X^* \ln \left(\frac{X(t)}{X(t-\tau)} \right) - X(t-\tau) \right]. \end{aligned}$$

We know the following properties about the equilibrium :

1. $\alpha\gamma_0 X^* = \delta$,
2. $\alpha\mu_0 X^* + \delta y^* = \alpha\beta_0 X^* e^{-\mu_0\tau}$,
3. $\alpha\mu_0 + \alpha\gamma_0 y^* = \alpha\beta_0 e^{-\mu_0\tau}$.

Thus we get

$$\begin{aligned}
 & \partial_t[L_*(\Phi_t(\phi, y_0))] \\
 = & \alpha \left(1 - \frac{X^*}{X(t)}\right) [\beta_0 e^{-\mu_0\tau} X(t-\tau) - \mu_0 X(t)] + \delta y^* - \alpha\gamma_0 X(t)y^* \\
 & + \alpha\beta_0 e^{-\mu_0\tau} \left[X(t) - X^* \ln\left(\frac{X(t)}{X(t-\tau)}\right) - X(t-\tau) \right] \\
 = & \alpha \left(1 - \frac{X^*}{X(t)}\right) [\beta_0 e^{-\mu_0\tau} X(t-\tau)] - \alpha\mu_0 X(t) + \alpha\beta_0 X^* e^{-\mu_0\tau} - \alpha\gamma_0 X(t)y^* \\
 & + \alpha\beta_0 e^{-\mu_0\tau} \left[X(t) - X^* \ln\left(\frac{X(t)}{X(t-\tau)}\right) - X(t-\tau) \right] \\
 = & \alpha \left(1 - \frac{X^*}{X(t)}\right) [\beta_0 e^{-\mu_0\tau} X(t-\tau)] - \alpha\beta_0 e^{-\mu_0\tau} X(t) + \alpha\beta_0 X^* e^{-\mu_0\tau} \\
 & + \alpha\beta_0 e^{-\mu_0\tau} \left[X(t) - X^* \ln\left(\frac{X(t)}{X(t-\tau)}\right) - X(t-\tau) \right] \\
 = & -(\alpha X^* \beta_0 e^{-\mu_0\tau}) \left(\frac{X(t-\tau)}{X(t)}\right) + \alpha\beta_0 X^* e^{-\mu_0\tau} - \alpha\beta_0 e^{-\mu_0\tau} X^* \ln\left(\frac{X(t)}{X(t-\tau)}\right) \\
 = & -\alpha\beta_0 X^* e^{-\mu_0\tau} \left(\frac{X(t-\tau)}{X(t)} - 1 + \ln\left(\frac{X(t)}{X(t-\tau)}\right)\right).
 \end{aligned}$$

Finally we get :

$$\partial_t[L_*(\Phi_t(\phi, y_0))] = -\alpha\beta_0 X^* e^{-\mu_0\tau} g\left(\frac{X(t-\tau)}{X(t)}\right) \quad (5.3)$$

and since g is a non-negative function, L_* is a Lyapunov function on S_3 . \square

5.2.3 Attractive set of the solutions

Now we compute the ω -limit set of each element of S_3 , with first of all a result about the boundedness of the solution, which results from the fact that some energy is at most conserved through time (or is decreasing).

Lemma 5.2.3. *For every $z \in S_2$, there exists a finite constant $C(z) > 0$ such that $X(t) \leq C(z)$ and $y(t) \leq C(z)$ for every $t \geq 0$.*

Proof. The proof results from Proposition 5.2.2, where we proved that for every $z := (\phi, y_0) \in S_3$, the positive function

$$F_{(\phi, y_0)} : t \mapsto L_*(\Phi_t(\phi, y_0)) \quad (5.4)$$

defined by

$$F_{(\phi, y_0)}(t) := \alpha X^* g\left(\frac{X(t)}{X^*}\right) + y^* g\left(\frac{y(t)}{y^*}\right) + \alpha\beta_0 e^{-\mu_0\tau} X^* \int_{-\tau}^0 g\left(\frac{X(t+s)}{X^*}\right) ds$$

is nonincreasing. Consequently, for every $t \geq 0$, $F_{(\phi, y_0)}(t) \leq F_{(\phi, y_0)}(0)$ where

$$F_{(\phi, y_0)}(0) = \alpha X^* g\left(\frac{\phi(0)}{x^*}\right) + y^* g\left(\frac{y_0}{y^*}\right) + \alpha \beta_0 e^{-\mu_0 \tau} X^* \int_{-\tau}^0 g\left(\frac{\phi(s)}{X^*}\right) ds.$$

Since each term of $F_{(\phi, y_0)}$ is positive and

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty,$$

then there exists a positive constant $C(z) > 0$ such that

$$X(t) \leq C(z), \quad y(t) \leq C(z), \quad t \geq 0$$

(otherwise it would contradict the fact that $F_{(\phi, y_0)}(t) \leq F_{(\phi, y_0)}(0)$). We can then deduce the result in S_2 using Proposition 5.1.9. \square

In the following we will call ‘ τ -periodic solution’ any solution that is τ -periodic but not constant.

Theorem 5.2.4. *For every initial condition $z \in S_3$ we have*

$$\omega(z) \subset \{v \in S_3 : \Phi_t(v) = \Phi_{t+\tau}(v), \forall t \geq 0\}$$

i.e. the solution (X, y) goes to a τ -periodic or a constant function.

Proof. Let $z \in S_3$. Using Proposition 5.2.2 and Lemma 5.2.3, we know that L_* is a Lyapunov function on S_3 and $\Phi_t(w)$ is a bounded solution such that $\Phi_t(w) \in S_3$ for every $t \geq 0$. Consequently, with [138, Theorem 5.17], we conclude that $\omega(z) \neq \emptyset$ and is contained in the maximal invariant of

$$\{v := (\phi, y_0) \in S_3 : \partial_t [L_*(\Phi_t(v))] = 0, \forall t \geq 0\}.$$

We see that (5.3) implies that

$$X(t - \tau) = X(t), \quad \forall t \geq 0,$$

so $\omega(z)$ is included in

$$\{v := (\phi, y_0) \in S_3 : \Phi_t^x(v) = \Phi_{t+\tau}^x(v), \forall t \geq 0\},$$

where Φ^x is the first component of Φ . Consequently X goes to a τ -periodic or constant function. If it goes to a constant then y as well. If it's toward a τ -periodic then classical results (see e.g. [73]) shows that X is in $\mathcal{C}^1[0, \infty)$. Thus, we get

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [X'(t) - X'(t - \tau)] = 0$$

which implies

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\gamma_0 X(t)y(t) - \gamma_0 X(t - \tau)y(t - \tau)] = 0$$

hence

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - y(t + \tau)] = 0$$

and y goes to a τ -periodic which ends the proof. \square

Corollary 5.2.5. *For every initial condition $z \in S_2$, the solution (X, y) goes to a τ -periodic or constant function.*

Proof. We know that the set S_2 is $(2\tau, S_3)$ -positively invariant (Proposition 5.1.9). So taking $(\phi, y_0) \in S_2$ and considering $\Phi_{2\tau}(\phi, y_0) \in S_3$ as initial condition instead of (ϕ, y_0) , we can use Theorem 5.2.4 and prove this statement. \square

5.2.4 Number of τ -periodic solutions

With the latter result we have the convergence to either one of the equilibria ($\overline{E_0}$ or $\overline{E^*}$) or to a τ -periodic solution. A necessary and sufficient condition to get such periodic solution is the following

$$\frac{\tau\sqrt{\delta y^* \gamma_0}}{2\pi} > 1 \quad (5.5)$$

as stated in the next proposition.

Theorem 5.2.6. *There is a τ -periodic solution of (5.1) if and only if (5.5) is verified. In this case, the solution is unique and will be denoted by $(p, q) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^2)$ in the following.*

Remark 5.2.7. By unique, we mean that if there are two periodic solutions (X, y) and (u, v) in $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ then there exists $h \in [0, \tau]$ such that

$$(X, y) = (\tau_h u, \tau_h v)$$

where $\tau_h u = u(h + \cdot)$ is the translation operator.

Let us first remind some useful property about the classical Lotka-Volterra ODE model.

Lemma 5.2.8 ([128], Theorem 1). *The solution of*

$$\begin{cases} x'(t) &= ax(t) - bx(t)y(t), \\ y'(t) &= cx(t)y(t) - dy(t), \\ (x(0), y(0)) &= (x^0, y^0) \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (5.6)$$

is periodic with some period T . Define the conserved energy E (through time) of (5.6) by

$$\begin{aligned} E &= cx^0 - d + by^0 - a - a \ln\left(\frac{by^0}{a}\right) - d \ln\left(\frac{cx^0}{d}\right) \\ &= dg\left(\frac{cx^0}{d}\right) + ag\left(\frac{by^0}{a}\right) \geq 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

then the period T depends on E and moreover the function $E \mapsto T(E)$ is strictly increasing with

$$\lim_{E \rightarrow 0} T(E) = \frac{2\pi}{\sqrt{ad}}, \quad \lim_{E \rightarrow \infty} T(E) = \infty.$$

Proof of Theorem 5.2.6. If (X, y) is a τ -periodic solution of (5.1) then it is in fact solution of

$$\begin{cases} X'(t) &= (\beta_0 e^{-\mu_0 \tau} - \mu_0) X(t) - \gamma_0 X(t)y(t), \\ y'(t) &= \alpha \gamma_0 X(t)y(t) - \delta y(t). \end{cases} \quad (5.8)$$

Suppose that

$$\frac{\tau\sqrt{\delta y^* \gamma_0}}{2\pi} < 1,$$

then, using Lemma 5.2.8, for each initial condition, the solution is periodic with some period T . Since the period is strictly increasing, the period must verify

$$T \geq \frac{2\pi}{\sqrt{(\beta_0 e^{-\mu_0 \tau} - \mu_0) \delta}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\delta \gamma_0 y^*}} > \tau,$$

which is absurd. If

$$\frac{\tau \sqrt{\delta y^* \gamma_0}}{2\pi} = 1$$

then to get $T = \tau$ one we need to have $E = 0$, so using (5.7), we get

$$x^0 = \frac{d}{c}, \quad y^0 = \frac{a}{b}$$

which is equivalent, for (5.8), to

$$x^0 = X^*, \quad y^0 = y^*$$

so the solution is in fact constant and the first implication is thus proved.

Conversely, suppose that (5.5) is verified. Using Lemma 5.2.8, there is a unique energy $E_* > 0$ such that $T(E_*) = \tau$. Moreover, using (5.7) we can see that there is at least one initial condition $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^2$ such that the energy is equal to E_* . Thus there is at least one τ -periodic solution (X, y) of (5.8). Besides, every initial condition (x^1, y^1) with energy E_* is located on the solution (p, q) in the sense that there exists $t \in [0, \tau]$ such that

$$(p(t), q(t)) = (x^1, y^1).$$

Consequently there is a unique τ -periodic solution (p, q) of (5.8).

We finally see that (p, q) is also solution of (5.1) which ends the proof. \square

We can now be more precise about the attractive set, as stated in the following proposition.

Proposition 5.2.9. *Let the initial condition $z \in S_3$.*

1. *If (5.5) is not verified then*

$$\omega(z) \subset \{\overline{E^*}\} \cup \{\overline{E_0}\};$$

2. *If (5.5) is verified then*

$$\omega(z) \subset \{\overline{E^*}\} \cup \{\overline{E_0}\} \cup S_\tau;$$

where $S_\tau \subset S_3$ is the (periodic) positively invariant subset of S_3 defined by

$$S_\tau = \{(\phi, y_0) \in S_3 : \exists h \in [0, \tau], \forall s \in [-\tau, 0], \phi(s) = p(h + s + \tau), y_0 = q(h)\}.$$

Proof. The result follows easily from Theorem 5.2.4 and Theorem 5.2.6. \square

5.3 Around the equilibria

In this section, we first show that the solution cannot converge to E_0 and then we prove that E^* is Lyapunov stable.

5.3.1 Unattractivity of E_0

Since the equilibrium $\{\overline{E}_0\}$ is possibly an attractive set, we have to show that it is in fact not the case.

Proposition 5.3.1. *E_0 is strongly unattractive in S_2 .*

Proof. Suppose by contradiction that there exists $z := (\phi, y) \in S_2$ such that $\omega(z) = \overline{E}_0$. Then it would imply that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

and consequently, since

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \infty$$

we would have $\lim_{t \rightarrow \infty} F_{(\phi, y)}(t) = \infty$ which contradicts Lemma 5.2.3. \square

5.3.2 Local stability of E^*

Now we give a result about the non trivial equilibrium.

Proposition 5.3.2. *E^* is Lyapunov stable.*

To prove this result, we need to define the following sets

$$L_\eta = \{(\phi, y) \in \mathcal{X}_+ : L_*(\phi, y) < \eta\}, \quad \eta > 0$$

$$B(E^*, \rho) = \{(w, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(w, y) - E^*\|_{\mathbb{R}^2} \leq \rho\}, \quad \rho > 0,$$

$$B(\overline{E}^*, \rho) = \{(\phi, y) \in \mathcal{X}_+ : \|(\phi, y) - \overline{E}^*\|_{\mathcal{X}} \leq \rho\}, \quad \rho > 0,$$

and we give two lemmas (see [58, proof of Theorem 1.2] for the idea of such results).

Lemma 5.3.3. *For every $\rho > 0$, there exists $\eta > 0$ such that $(\phi, y) \in L_\eta \Rightarrow (\phi(0), y) \in B(E^*, \rho)$.*

Proof. Let $\rho > 0, \eta > 0$ and let $(\phi_\eta, y_\eta) \in L_\eta$. Thus we have $L_*(\phi_\eta, y_\eta) < \eta$ so

$$V_1(\phi_\eta, y_\eta) < \eta, \quad V_2(\phi_\eta, y_\eta) < \eta,$$

and

$$g\left(\frac{\phi_\eta(0)}{X^*}\right) < \frac{\eta}{\alpha X^*}, \quad g\left(\frac{y_\eta}{y^*}\right) < \frac{\eta}{y^*}.$$

Since g is nonnegative we get

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} g\left(\frac{\phi_\eta(0)}{X^*}\right) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} g\left(\frac{y_\eta}{y^*}\right) = 0,$$

and since g is zero only at 1, we obtain

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \phi_\eta(0) = X^*, \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} y_\eta = y^*.$$

So considering $\eta > 0$ small enough we get $\|(\phi(0), y) - E^*\|_{\mathbb{R}^2} \leq \rho$ and $(\phi(0), y) \in B(E^*, \rho)$. \square

Lemma 5.3.4. *For every $\eta > 0$, there exists $\rho > 0$ such that $B(\overline{E^*}, \rho) \subset L_\eta$.*

Proof. Let $\eta > 0, \rho > 0$ and let $(\phi_\rho, y_\rho) \in B(\overline{E^*}, \rho)$ then $\|(\phi_\rho, y_\rho) - \overline{E^*}\|_{\mathcal{X}} \leq \rho$ so we get

$$\|\phi_\rho - X^* \chi_{[-\tau, 0]}\|_\infty \leq \rho, \quad |y_\rho - y^*| \leq \rho.$$

Consequently we have

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} y_\rho = y^*, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \phi_\rho(s) = X^*, \quad \forall s \in [-\tau, 0],$$

and then

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} g\left(\frac{y_\rho}{y^*}\right) = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} g\left(\frac{\phi_\rho(s)}{X^*}\right) = 0, \quad \forall s \in [-\tau, 0].$$

Consequently

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} V_1(\phi_\rho, y_\rho) = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} V_2(\phi_\rho, y_\rho) = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} V_3(\phi_\rho, y_\rho) = 0.$$

So, considering $\rho > 0$ small enough, we get $L_*(\phi_\rho, y_\rho) \leq \eta$. \square

Proof of Proposition 5.3.2. Let $\rho_1 > 0$, then using Lemma 5.3.3, there exists $\eta > 0$ such that

$$(\phi, y) \in L_\eta \Rightarrow (\phi(0), y) \in B(E^*, \rho_1)$$

and using Lemma 5.3.4, there exists $\rho_2 > 0$ such that

$$B(\overline{E^*}, \rho_2) \subset L_\eta.$$

Let $(\phi, y) \in B(\overline{E^*}, \rho_2)$ then $(\phi, y) \in L_\eta$ so $(\phi(0), y) \in B(E^*, \rho_1)$.

Since $F_{(\phi, y)}$ is nonincreasing, then L_η is positively invariant, which implies that

$$(\Phi_t^x(\phi, y)(0), \Phi_t^y(\phi, y)) \in B(E^*, \rho_1), \quad \forall t \geq 0,$$

(where Φ^y is the second component of Φ), i.e.

$$(X(t), y(t)) \in B(E^*, \rho_1), \quad \forall t \geq 0.$$

Consequently

$$|X(t) - X^*| + |y(t) - y^*| \leq \rho_1, \quad \forall t \geq 0.$$

Since $(\phi, y) \in B(\overline{E^*}, \rho_2)$ then we have

$$\|\phi - X^* \chi_{[-\tau, 0]}\|_\infty + |y - y^*| \leq \rho_2,$$

and considering $\rho_2 > 0$ small enough, verifying $\rho_2 \leq \rho_1$, we get

$$\|X_t - X^* \chi_{[-\tau, 0]}\|_\infty + |y(t) - y^*| \leq \rho_1, \quad \forall t \geq 0,$$

that is

$$\|(X_t, y(t)) - \overline{E^*}\|_{\mathcal{X}} \leq \rho_1, \quad \forall t \geq 0$$

and then

$$\Phi_t(\phi, y) \in B(\overline{E^*}, \rho_1), \quad \forall t \geq 0.$$

We finally have shown that E^* is Lyapunov stable, since for every $\rho_1 > 0$ there exists $\rho_2 > 0$ such that

$$(\phi, y) \in B(\overline{E^*}, \rho_2) \Rightarrow \Phi_t(\phi, y) \in B(\overline{E^*}, \rho_1), \quad \forall t \geq 0.$$

\square

We can then conclude of the attractiveness of E^* in some case.

Theorem 5.3.5. *If (5.5) is not verified, then E^* is globally asymptotically stable in S_3 (hence in S_2).*

Proof. Using Proposition 5.2.9 and Proposition 5.3.1 we get

$$\omega(z) = \{\overline{E^*}\}$$

for every $z \in S_3$. Then the global stability of $\overline{E^*}$ (and E^*) in the basin S_3 under the assumption (5.5) is a consequence of Proposition 5.3.2 and Proposition 5.1.9. Using the same argument as for proving Corollary 5.2.5, we get the global stability in the basin S_2 . \square

5.4 Back to the PDE model

In this section we deduce some stability result for the PDE model (2.1). We consider the set

$$\mathcal{X}_A = \{(x_0, y_0) \in L^1_+(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+^* : \int_0^\infty x_0(a) da > 0\}.$$

Theorem 5.4.1. *Suppose that E^* is globally asymptotically stable in S_2 . Under the assumptions made in Section 5.1.1, the equilibrium E_2 is globally attractive in \mathcal{X}_A for (2.1).*

Proof. Let $(x_0, y_0) \in \mathcal{X}_A$ and (x, y) be the solution of (2.1). We get for every $a \geq \tau$

$$x(\tau, a) \geq x_0(a - \tau) e^{-\mu_0 \tau} e^{-\gamma_0 \tau M},$$

where $M = \max_{s \in [0, \tau]} y(s) < \infty$. Therefore

$$\int_\tau^\infty x(\tau, a) da > 0$$

and we also have

$$y(\tau) \geq y_0 e^{-\delta \tau} > 0.$$

We can then consider for (5.1) the initial condition $z = (\phi, y(\tau)) \in \mathcal{X}$, where

$$\phi(\theta) = \int_\tau^\infty x(\tau + \theta, a) da,$$

for every $\theta \in [-\tau, 0]$. Since $\phi(0) > 0$, we can verify by continuity that $\int_{-\tau}^0 \phi(s) ds > 0$ whence $z \in S_2$. We supposed that E^* is globally stable in S_2 (for (5.1)) so we get

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = X^*,$$

consequently

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, 0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \beta_0 \int_\tau^\infty x(t, a) da = \lim_{t \rightarrow \infty} \beta_0 X(t) = \beta_0 X^*.$$

Let $\varepsilon > 0$, then there exists $t^* > 0$ such that for every $t \geq t^*$, we have $|X(t) - X^*| \leq \varepsilon$. Hence for $t \geq t^*$ we get

$$\begin{cases} \partial_a x(t, a) + \partial_t x(t, a) = -\mu_0 x(t, a) - \gamma_0 \chi_{[\tau, \infty)}(a) x(t, a), \\ \beta_0(X^* - \varepsilon) \leq x(t, 0) \leq \beta_0(X^* + \varepsilon). \end{cases}$$

We thus have for $a \leq t$

$$\begin{cases} \beta_0(X^* - \varepsilon) e^{-\mu_0 a} \leq x(t, a) \leq \beta_0(X^* + \varepsilon) e^{-\mu_0 a} & \text{if } a \in [0, \tau], \\ \beta_0(X^* - \varepsilon) e^{-\mu_0 a} e^{(a-\tau)\gamma_0 y^*} \leq x(t, a) \leq \beta_0(X^* + \varepsilon) e^{-\mu_0 a} e^{(a-\tau)\gamma_0 y^*} & \text{if } a \in [\tau, t]. \end{cases}$$

We know that $E_2 = (x^*, y^*)$ must satisfy the following system

$$\begin{cases} x^*(a) = x^*(0) e^{-\int_0^a \mu(s) ds - y^* \int_0^a \gamma(s) ds}, \\ x^*(0) \left[1 - \int_0^\infty \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(s) ds - y^* \int_0^a \gamma(s) ds} da \right] = 0, \\ y^* [\alpha \int_0^\infty \gamma(a) x^*(a) da - \delta] = 0. \end{cases}$$

We readily see that y^* is the same for (2.1) and (5.1) i.e.

$$y^* = \frac{\beta_0 e^{-\mu_0 \tau} - \mu_0}{\gamma_0}.$$

Moreover we have

$$x^*(a) = \begin{cases} x^*(0) e^{-\mu_0 a} & \text{if } a \in [0, \tau], \\ x^*(0) e^{-\mu_0 a} e^{-\gamma_0 y^* (a-\tau)} & \text{if } a \geq \tau, \end{cases}$$

so that

$$\alpha \gamma_0 x^*(0) \int_\tau^\infty e^{-\mu_0 a} e^{-\gamma_0 y^* (a-\tau)} da = \delta$$

whence

$$x^*(0) = \frac{\delta}{\alpha \gamma_0} e^{\mu_0 \tau} (\mu_0 + \gamma_0 y^*) = \beta_0 X^*.$$

It is then clear that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, a) = x^*(a)$$

for every $a \geq 0$ and the result follows. □

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Quelques rappels

Nous faisons dans cette annexe quelques rappels concernant les opérateurs non bornés et les semigroupes. On rappelle des résultats de compacité et de positivité puis le principe du maximum fort de Hopf.

A.1 Quelques propriétés spectrales des opérateurs non bornés

Soient $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ un espace de Banach et

$$\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$$

un opérateur linéaire non borné sur \mathcal{X} . On dit que \mathcal{A} est *fermé* si son *graphe*

$$\Gamma(\mathcal{A}) := \{(u, \mathcal{A}u) : u \in D(\mathcal{A})\}$$

est fermé dans $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Cette propriété se traduit aussi par

Proposition A.1.1 ([16] Théorème 2.1, p. 5). *Un opérateur \mathcal{A} est fermé si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq D(\mathcal{A})$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \in X$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}x_n = y \in \mathcal{X}$, on a $x \in D(\mathcal{A})$ et $\mathcal{A}x = y$.*

Lorsque \mathcal{A} est fermé, alors $D(\mathcal{A})$ muni de la *norme du graphe*

$$\|u\|_{D(\mathcal{A})} := \|u\|_{\mathcal{X}} + \|\mathcal{A}u\|_{\mathcal{X}}$$

est un espace de Banach.

Définition A.1.2. *Un sous-espace D de $D(\mathcal{A})$ est appelé un cœur de \mathcal{A} si D est dense dans $D(\mathcal{A})$ pour la norme du graphe.*

Soit

$$\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$$

un opérateur fermé.

On appelle *ensemble résolvant* de \mathcal{A} l'ensemble

$$\rho(\mathcal{A}) := \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda - \mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{X} \text{ est bijectif}\}.$$

Son complémentaire dans le plan complexe est appelé le *spectre* de \mathcal{A} et sera noté $\sigma(\mathcal{A})$. On notera que, si $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, l'inverse

$$R(\lambda, \mathcal{A}) := (\lambda - \mathcal{A})^{-1}$$

est défini sur tout l'espace \mathcal{X} et est fermé. Par le théorème du graphe fermé, il est borné, i.e.

$$R(\lambda, \mathcal{A}) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}),$$

où $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ désigne l'ensemble des opérateurs bornés sur \mathcal{X} . Cet opérateur est appelé la *résolvante* de \mathcal{A} au point λ . L'ensemble résolvant $\rho(\mathcal{A})$ est un ouvert du plan complexe et l'application

$$\rho(\mathcal{A}) \ni \lambda \mapsto R(\lambda, \mathcal{A})$$

est analytique sur chaque composante connexe de $\rho(\mathcal{A})$. La résolvante satisfait à l'équation fonctionnelle suivante dite *identité de la résolvante*

$$R(\lambda, \mathcal{A}) - R(\mu, \mathcal{A}) = (\mu - \lambda)R(\lambda, \mathcal{A})R(\mu, \mathcal{A}), \quad \lambda, \mu \in \rho(\mathcal{A}).$$

Le spectre de \mathcal{A} est donc un fermé de \mathbb{C} . Lorsque \mathcal{A} est borné, $\sigma(\mathcal{A})$ est un compact non vide et on appelle alors *rayon spectral* de \mathcal{A} le nombre

$$r_\sigma(\mathcal{A}) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}.$$

On définit également la *borne spectrale* de \mathcal{A} par

$$s(\mathcal{A}) := \sup\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\},$$

qui permet de définir le *spectre périphérique*

$$\sigma_+(\mathcal{A}) := \{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}) : \operatorname{Re} \lambda = s(\mathcal{A})\}.$$

Un sous-ensemble important du spectre est le *spectre ponctuel*

$$\sigma_p(\mathcal{A}) := \{\lambda, \lambda - \mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{X} \text{ n'est pas injectif}\}.$$

Un élément de $\sigma_p(\mathcal{A})$ est dit *valeur propre* de \mathcal{A} et il lui correspond alors un vecteur $D(\mathcal{A}) \ni x \neq 0$ tel que $(\lambda - \mathcal{A})x = 0$ que l'on appelle *vecteur propre* (ou *fonction propre* lorsque \mathcal{X} est un espace de fonctions) correspondant à λ .

Un élément $\mu \in \sigma(\mathcal{A})$ est dit *isolé* s'il existe une série de Laurent autour de μ :

$$(\lambda - \mathcal{A})^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\lambda - \mu)^n U_n,$$

où

$$U_n = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{(\lambda - \mathcal{A})^{-1}}{(\lambda - \mu)^{n+1}} d\lambda, \quad n \in \mathbb{Z}$$

avec C un chemin positivement orienté centré en μ . On dit que μ est un *pôle* de la résolvante s'il existe $k > 0$ tel que $U_{-k} \neq 0$ et $U_{-n} = 0$ pour tout $n > k$. Dans ce cas, k est appelé *ordre* du pôle et μ est une valeur propre de \mathcal{A} . On appelle alors *multiplicité algébrique* de μ le nombre

$$m_a := \dim \left(\ker(\mu - \mathcal{A})^k \right) \leq +\infty.$$

A.2 Quelques propriétés spectrales des semigroupes

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats concernant la théorie des semigroupes. On pourra consulter les livres de Hille et Phillips [77], Pazy [115], Nagel et al [113] ainsi que celui de Engel et Nagel [45] pour plus d'informations.

Définition A.2.1. Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés de \mathcal{X} . On dit que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 -semigroupe si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $T(0) = Id_{\mathcal{X}}$ (l'opérateur identité dans \mathcal{X});
2. $T(t + s) = T(t)T(s)$ pour tout $t, s \geq 0$ (propriété de semigroupe).
3. $0 \leq t \mapsto T(t)x$ est continue pour tout $x \in \mathcal{X}$ (continuité forte).

On utilisera la notation $\{e^{t\mathcal{A}}\}_{t \geq 0}$ ou $\{T_{\mathcal{A}}(t)\}_{t \geq 0}$ pour désigner le semigroupe généré par \mathcal{A} (si aucune confusion n'est possible, on s'autorisera la notation $\{T(t)\}_{t \geq 0}$). On peut donner une majoration de la norme du semigroupe avec la

Proposition A.2.2 ([115] Théorème 2.2, p. 4). Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semigroupe. Alors il existe deux constantes $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ telles que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, pour tout $t \in [0, +\infty)$.

Définition A.2.3. Si, dans la majoration précédente, on a $\omega = 0$, alors le semi-groupe est dit uniformément borné. Si de plus $M = 1$, on a un C_0 -semigroupe dit de contraction, sinon on dira seulement de quasi-contraction.

Pour tout C_0 -semigroupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, on peut associer son *générateur infinitésimal* (ou juste *générateur*) défini par

$$\mathcal{A}x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}$$

de domaine

$$D(\mathcal{A}) := \{x \in \mathcal{X} : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe}\}.$$

On peut vérifier que l'opérateur \mathcal{A} ainsi défini est fermé et à domaine dense. On énonce maintenant le théorème de Lumer-Phillips (voir e.g. [115, Théorème 4.3, p. 14]) permettant de vérifier qu'un opérateur est bien un générateur. Il requiert auparavant la notion de *dissipativité*.

Définition A.2.4. Un opérateur linéaire $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ est dit *dissipatif* si, pour tout $x \in D(\mathcal{A})$ et tout $\lambda > 0$, on a $\|(\lambda I - \mathcal{A})x\| \geq \lambda \|x\|$.

Théorème A.2.5 (Lumer-Phillips). Supposons que \mathcal{A} est à domaine dense. S'il existe $\omega \geq 0$ tel que $(\omega I - \mathcal{A})$ soit dissipatif et s'il existe $\lambda_0 > \omega$ tel que $(\lambda_0 I - \mathcal{A})$ soit surjectif, alors \mathcal{A} est le générateur infinitésimal d'un semigroupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, qui satisfait $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$ pour tout $t \geq 0$.

On remarque que la résolvante $R(\lambda, \mathcal{A})$ peut s'écrire comme transformée de Laplace du semigroupe :

$$R(\lambda, \mathcal{A}) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t) ds$$

pour tout $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0(\mathcal{A})$, où

$$\omega_0(\{T(t)\}_{t \geq 0}) := \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\|T(t)\|_{\mathcal{X}})}{t}$$

est le *type* (ou *taux de croissance*) de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, que l'on note également $\omega_0(\mathcal{A})$ puisqu'il y a une correspondance entre les semigroupes et les générateurs.

Définition A.2.6. On note $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ le sous-espace de $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ composé des opérateurs compacts sur \mathcal{X} , c'est-à-dire qui envoie toute partie bornée de \mathcal{X} sur une partie relativement compacte de \mathcal{X} (dont l'adhérence dans \mathcal{X} est compacte). On définit la norme essentielle de $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ par

$$\|L\|_{\text{ess}} := \inf_{K \in \mathcal{K}(\mathcal{X})} \|L - K\|_{\mathcal{X}}.$$

L'espace quotient $\mathcal{L}(\mathcal{X})/\mathcal{K}(\mathcal{X})$ est appelé *Algèbre de Calkin* et est une algèbre de Banach unitaire lorsqu'on la munit de la norme $\|\hat{L}\| = \|L\|_{\text{ess}}$ où $\hat{L} = L + \mathcal{K}(\mathcal{X})$.

Définition A.2.7. Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semigroupe de générateur infinitésimal \mathcal{A} . Alors on définit le *taux de croissance essentiel* ou (*type essentiel*) de \mathcal{A} (et de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$) par

$$\omega_{\text{ess}}(\{T(t)\}_{t \geq 0}) := \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\|T(t)\|_{\text{ess}})}{t},$$

que l'on notera aussi $\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A})$. Les deux théorèmes suivants, démontrés par Engel et Nagel [45], donnent d'une part une caractérisation du type essentiel par le type et la borne spectrale et impliquent d'autre part l'invariance du type essentiel par tout opérateur compact.

Théorème A.2.8 ([45] Corollaire IV. 2.11, p. 258). On a

1. $\omega_0(\mathcal{A}) = \max\{\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A}), s(\mathcal{A})\}$;
2. pour tout $\omega > \omega_{\text{ess}}(\mathcal{A})$, l'ensemble $\sigma_{\omega} = \{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}), \operatorname{Re} \lambda > \omega\}$ est formé au plus de valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie.

Théorème A.2.9 ([45] Proposition IV. 2.12, p. 258). Pour tout opérateur $K \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$, on a $\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A} + K) = \omega_{\text{ess}}(\mathcal{A})$.

Afin de montrer par exemple le comportement exponentiel asynchrone d'un semigroupe, on donne la définition suivante.

Définition A.2.10. Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semigroupe généré par l'opérateur \mathcal{A} . On dit que \mathcal{A} (ou $\{T(t)\}_{t \geq 0}$) a un *gap spectral* si

$$\omega_{\text{ess}}(\mathcal{A}) < \omega_0(\mathcal{A}).$$

A.3 Résultats de compacité (faible)

D'après la Définition A.2.7 et le Théorème A.2.9, on voit que les opérateurs compacts jouent un rôle fondamental pour déterminer le type essentiel. Un moyen classique de montrer la compacité (forte) d'un opérateur dans les espaces L^p est le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov ([160, Théorème X.1, p. 275]).

Théorème A.3.1 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov). *Soit B un ensemble borné de $L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $p \in [1, +\infty)$ et $n \geq 1$. Alors B est relativement compact si et seulement si on a*

1. $\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0$ uniformément sur B , où $\tau_h f$ est la translation de f par h , i.e. $\tau_h f(x) = f(x - h)$;
2. $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{|x| > r} |f(x)|^p dx = 0$ uniformément sur B .

Lorsque la résolvante d'un opérateur est compacte, on peut être plus précis quant à son spectre.

Théorème A.3.2 ([45] Corollaire IV. 1.19, p. 248). *Si \mathcal{A} est à résolvante compacte alors le spectre de \mathcal{A} est composé (au plus) de valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie.*

Pour montrer la compacité de la résolvante, on donne l'équivalence suivante.

Théorème A.3.3 ([45] Proposition II. 4.25, p. 117). *Soit $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ un opérateur sur \mathcal{X} avec $\rho(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ alors \mathcal{A} est à résolvante compacte si et seulement si l'injection canonique $i : (D(\mathcal{A}), \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) \rightarrow \mathcal{X}$ est compacte.*

De plus, on peut énoncer le théorème de Rellich-Kondrachov (voir [46] Théorème 5.7.1, p. 272), qui permet d'avoir la compacité de l'injection canonique dans certains cas.

Théorème A.3.4 (Rellich-Kondrachov). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Alors l'injection canonique*

$$i : W^{1,1}(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$$

est compacte.

Dans le cadre L^1 , la notion de *compacité faible* joue un rôle clé.

Définition A.3.5. *Un ensemble borné est dit faiblement compact s'il est compact pour la topologie faible. De plus, l'opérateur $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ est faiblement compact s'il envoie tout borné de \mathcal{X} sur un ensemble relativement faiblement compact de \mathcal{X} (dont l'adhérence dans \mathcal{X} est faiblement compacte).*

Dans le cadre L^1 , on donne une caractérisation plus précise d'ensemble relativement faiblement compact.

Théorème A.3.6 ([156], Section 4). *Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $U \subset L^1(I)$. Alors U est relativement faiblement compact si et seulement si*

- $\sup_{f \in U} \int_I |f(s)| ds < +\infty$;

- $\lim_{c \rightarrow +\infty} \sup_{f \in U} \int_c^{+\infty} f(s) ds = 0$;
- $\lim_{|E| \rightarrow 0} \sup_{f \in U} \int_E f(s) ds = 0$.

Une propriété importante des opérateurs faiblement compacts est la suivante.

Théorème A.3.7 ([41] Corollaire VI.13. p. 510). *Si \mathcal{A} est un opérateur faiblement compact de L^1 alors l'opérateur composé \mathcal{A}^2 est compact.*

A.4 Quelques résultats de positivité

Cette section concerne la positivité des opérateurs et des semigroupes. On se place dans toute cette section dans l'espace

$$\mathcal{X} = L^1(\Omega, \mu)$$

où (Ω, μ) est un espace mesuré avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 1$. On notera

$$\mathcal{X}_+ = \{f \in \mathcal{X} : f(x) \geq 0 \text{ p.p. } x \in \Omega\}$$

le cône positif de \mathcal{X} et \mathcal{X}' le dual de \mathcal{X} , puis on dénote par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le crochet de dualité entre L^1 et L^∞ . Pour $f \in \mathcal{X}$, la notation $f > 0$ signifiera $f \in \mathcal{X}_+$ et $f \neq 0$.

Définition A.4.1. *Soient $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ un opérateur et $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semigroupe. On dit que*

1. \mathcal{A} est positif s'il laisse le cône positif \mathcal{X}_+ invariant. On le notera $\mathcal{A} \geq 0$;
2. $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est positif si chaque opérateur $T(t)$ est positif ;
3. \mathcal{A} est strictement positif ('positivity improving') si, pour chaque $f \in \mathcal{X}, f > 0$ et $x \in \mathcal{X}', x > 0$, on a $\langle \mathcal{A}f, x \rangle > 0$: il envoie les fonctions positives non identiquement nulles sur des fonctions strictement positives presque partout ;
4. \mathcal{A} est irréductible si, pour chaque $f \in \mathcal{X}, f > 0$ et $x \in \mathcal{X}', x > 0$, il existe un entier n tel que $\langle \mathcal{A}^n f, x \rangle > 0$;
5. $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est irréductible si, pour chaque $f \in \mathcal{X}, f > 0$ et $x \in \mathcal{X}', x > 0$, il existe $t > 0$ tel que $\langle T(t)f, x \rangle > 0$.

Voici quelques résultats faisant le lien entre ces définitions.

Théorème A.4.2. *Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semigroupe sur \mathcal{X} de générateur \mathcal{A} . Alors le semigroupe est positif (respectivement irréductible) si et seulement si, pour λ assez grand, la résolvante $R(\lambda, \mathcal{A})$ est positive (respectivement strictement positif) ([29], p. 165). De plus, \mathcal{A} est irréductible si et seulement s'il n'existe pas de sous-espace de la forme*

$$L^1(\tilde{\Omega}), \quad \tilde{\Omega} \subset \Omega, \quad 0 < |\tilde{\Omega}| < |\Omega|$$

qui soit invariant par \mathcal{A} ([108], p. 101).

Pour un opérateur positif dans L^1 , son type est donné par :

Théorème A.4.3 ([45] Théorème VI.1.15, p. 358). *Supposons que \mathcal{A} soit générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe positif dans \mathcal{X} . Alors*

$$\omega_0(\mathcal{A}) = s(\mathcal{A}).$$

Plusieurs propriétés sont également vraies pour les opérateurs positifs.

Théorème A.4.4 ([108], Théorème 5.1, p. 102). *Supposons que \mathcal{A} est un opérateur linéaire positif borné. Alors $r_\sigma(\mathcal{A}) \in \sigma(\mathcal{A})$.*

L'analogie de cette propriété pour les opérateurs non bornés est le suivant.

Théorème A.4.5 ([29], p. 202). *Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semigroupe positif sur \mathcal{X} , de générateur \mathcal{A} . Alors la borne spectrale de \mathcal{A} vérifie*

$$s(\mathcal{A}) \in \sigma(\mathcal{A}),$$

à condition que $\sigma(\mathcal{A}) \neq \emptyset$.

Pour donner une indication sur la borne spectrale d'un opérateur, on peut utiliser les deux théorèmes suivants.

Théorème A.4.6 ([113], Proposition 2.5, p. 67). *Pour $\lambda > s(\mathcal{A})$, on a*

$$r_\sigma((\lambda - \mathcal{A})^{-1}) = \frac{1}{\lambda - s(\mathcal{A})}.$$

Théorème A.4.7 ([34], Théorème 3). *Supposons que \mathcal{A} soit un opérateur linéaire positif. Si \mathcal{A} est compact et irréductible alors*

$$r_\sigma(\mathcal{A}) > 0.$$

On a alors :

Corollaire A.4.8. *Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ un opérateur linéaire positif. Si \mathcal{A} est faiblement compact et strictement positif alors*

$$r_\sigma(\mathcal{A}) > 0.$$

Preuve : Comme \mathcal{A} est faiblement compact alors \mathcal{A}^2 est compact par le Théorème A.3.7. Le fait que \mathcal{A} soit strictement positif implique que \mathcal{A} l'est également. Ainsi, en utilisant le Théorème A.4.7, on obtient

$$r_\sigma(\mathcal{A}^2) > 0$$

et ainsi

$$r_\sigma(\mathcal{A}^2) = (r_\sigma(\mathcal{A}))^2 > 0$$

ce qui montre le résultat. □

Pour comparer le rayon spectral de deux opérateurs, on peut faire appel au résultat suivant, dû à Marek.

Théorème A.4.9 ([102], Théorème 4.3). *Soient \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 deux opérateurs linéaires bornés et positifs tels que*

$$\mathcal{A}_1 \leq \mathcal{A}_2, \quad \mathcal{A}_1 \neq \mathcal{A}_2.$$

On suppose que \mathcal{A}_2 est irréductible et à puissance compacte, alors $r_\sigma(\mathcal{A}_1) < r_\sigma(\mathcal{A}_2)$.

On donne à présent une formule permettant de calculer la résolvante d'un opérateur positif perturbé

Théorème A.4.10 ([148] Théorème 1.1). *Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux opérateurs linéaires positifs avec $\mathcal{B} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$. Pour $\lambda > s(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ on a*

$$R(\lambda, \mathcal{A} + \mathcal{B}) = R(\lambda, \mathcal{A}) + R(\lambda, \mathcal{A}) \sum_{n=1}^{\infty} (\mathcal{B}R(\lambda, \mathcal{A}))^n.$$

A.5 Formule de Duhamel

Définition A.5.1. *On appelle solution mild du problème de Cauchy (1.9), toute fonction continue $u : [0, +\infty[\rightarrow \mathcal{X}$ qui satisfait la formule de Duhamel*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(u(s))ds.$$

Théorème A.5.2 ([115], Théorème 6.1.4, p. 185). *Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ une fonction localement lipschitzienne sur \mathcal{X} . Si \mathcal{A} est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sur \mathcal{X} , alors, pour toute condition initiale $u_0 \in \mathcal{X}$, il existe $t_{\max} \leq +\infty$ tel que le problème (1.9) admet une unique solution mild $u \in \mathcal{C}([t_0, t_{\max}), \mathcal{X})$. Si, de plus, $t_{\max} < +\infty$ alors $\lim_{t \rightarrow t_{\max}} \|u(t)\|_{\mathcal{X}} = +\infty$.*

A.6 Théorème de Lax-Milgram

Théorème A.6.1 (Lax-Milgram). [[22], Corollaire V.8, p. 84]

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert réel ou complexe muni de son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de norme associée notée $\| \cdot \|$. On suppose que $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire qui est

1. *continue sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, c'est-à-dire qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $(u, v) \in \mathcal{H}^2$:*
 $|a(u, v)| \leq c\|u\|\|v\|$;
2. *coercive sur \mathcal{H} (ou \mathcal{H} -elliptique), i.e. qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $u \in \mathcal{H}$:*
 $a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2$,

puis que $L(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur \mathcal{H} . Alors il existe une unique fonction u de \mathcal{H} telle que l'équation

$$\operatorname{Re}(a(u, v)) = L(v)$$

soit vérifiée pour tout $v \in \mathcal{H}$.

A.7 Principe du maximum

On rappelle dans cette section le principe du maximum fort de Hopf. Soit $u \in \mathcal{C}^2[a, b]$ une fonction qui satisfait l'inégalité

$$u'' + g(x)u' + h(x)u \geq 0, \quad x \in (a, b).$$

On suppose que $h \leq 0$ et que g et h sont bornées sur tout sous-intervalle de (a, b) . On a ainsi les deux théorèmes suivants, qui donnent une propriété quand le maximum de la fonction u est atteint respectivement à l'intérieur de (a, b) ou sur le bord.

Théorème A.7.1 ([124], Théorème 3, p. 6). *Sous les hypothèses précédentes, si u atteint son maximum $M \geq 0$ en un point $c \in (a, b)$, alors $u(x) \equiv M$ pour tout $x \in (a, b)$.*

Théorème A.7.2 ([124], Théorème 4, p. 7). *On suppose les hypothèses précédentes, que u est une solution non constante qui possède une dérivée à droite en a et une dérivée à gauche en b . Si u atteint son maximum (positif ou nul) en a et si la fonction $g(x) + (x - a)h(x)$ est minorée en $x = a$, alors $u'(a) < 0$. De même, si u atteint son maximum en b et si la fonction $g(x) - (b - x)h(x)$ est majorée en $x = b$, alors $u'(b) > 0$.*

Annexe B

Compléments techniques au Chapitre 2

On donne dans cette section quelques compléments permettant de montrer que l'opérateur \mathcal{A} défini dans la Section 2.2.2 est bien générateur d'un C_0 -semigroupe.

Proposition B.1. *L'ensemble $D(\mathcal{A})$ est dense dans \mathcal{X} .*

Preuve : On se sert de [11, Lemme 2.2] pour la preuve. On pose

$$U = \left\{ \phi \in L^1(\mathbb{R}^+) : \phi' + \mu\phi \in L^1(\mathbb{R}^+) \text{ et } \phi(0) = \int_0^{+\infty} \phi(a)\beta(a)da \right\}$$

puis on définit l'ensemble

$$E = \left\{ \phi \in L^1(\mathbb{R}^+) : \text{supp}(\phi) \subset [0, +\infty) \right\}$$

qui est dense dans $L^1(\mathbb{R}^+)$. Ainsi, il suffit de montrer que U est dense dans E . Soit $\phi \in E$. Le but est de construire une fonction de U qui va converger vers ϕ .

Soit $m < +\infty$ tel que $\phi(a) = 0$ pour tout $a \in (m, +\infty)$, qui existe par définition de E . Pour tout $\eta \in (0, m)$, on définit

$$\phi_\eta(a) = \begin{cases} \phi(a) & \text{si } a \geq \eta \\ \phi(\eta) & \text{si } 0 \leq a \leq \eta \end{cases}$$

et

$$\psi_\eta(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \geq \eta, \\ 1 - a/\eta & \text{si } 0 \leq a \leq \eta. \end{cases}$$

On définit la fonction $g_\eta := \phi_\eta + \epsilon_\eta \psi_\eta$ où ϵ_η est un réel à déterminer pour que $g_\eta \in U$. Vérifions que $g_\eta \in W^{1,1}(\mathbb{R}^+)$. On a

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |g_\eta(a)|da &= \int_0^\eta |\phi(\eta) + \epsilon_\eta(1 - a/\eta)|da + \int_\eta^{+\infty} |\phi(a)|da \\ &\leq \eta|\phi(\eta)| + \eta\epsilon_\eta + \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} < +\infty. \end{aligned}$$

Ainsi $g_\eta \in L^1(\mathbb{R}_+)$, puis on calcule

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left| \frac{dg_\eta}{da} \right| da &= \int_0^{+\infty} |\phi'_\eta(a) + \epsilon_\eta \psi'_\eta(a)| da = \int_0^\eta \left| \frac{1}{\eta} \right| da + \int_\eta^{+\infty} |\phi'(a)| da \\ &\leq 1 + \|\phi'\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} < +\infty \end{aligned}$$

Par conséquent, $g_\eta \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+)$ et il faut ensuite que

$$\begin{aligned} g_\eta(0) = \int_0^{+\infty} \beta(a)g_\eta(a)da &\Leftrightarrow \phi_\eta(0) + \epsilon_\eta\psi_\eta(0) = \int_0^{+\infty} \beta(a)g_\eta(a)da \\ &\Leftrightarrow \phi(\eta) + \epsilon_\eta = \int_0^{+\infty} \beta(a) (\phi_\eta(a) + \epsilon_\eta\psi_\eta(a)) da \\ &\Leftrightarrow \epsilon_\eta = \frac{\int_0^{+\infty} \beta(a)\phi_\eta(a)da - \phi(\eta)}{1 - \int_0^{+\infty} \beta(a)\psi_\eta(a)da}. \end{aligned}$$

Par convergence dominée, on montre que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \psi_\eta(a)\beta(a)da = 0.$$

Par conséquent, il existe $\eta_0 \leq m$ tel que, pour tout $\eta \leq \eta_0$, on a

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \psi_\eta(a)\beta(a)da \leq 1/2.$$

Ainsi, pour tout $\eta \in [0, \eta_0)$, ϵ_η est bien défini et on a

$$|\epsilon_\eta| \leq \frac{\|\phi_\eta\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}\|\beta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} + |\phi(\eta)|}{1 - \int_0^{+\infty} \psi_\eta(a)\beta(a)da}$$

puis

$$|\epsilon_\eta| \leq 2 \left(\|\phi_\eta\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}\|\beta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} + |\phi(\eta)| \right) < +\infty.$$

La fonction $\eta \mapsto \epsilon_\eta$ est donc bornée sur $[0, \eta_0]$. De plus $\lim_{\eta \rightarrow 0} \|\phi_\eta - \phi\|_{L^1} = 0$ et $\lim_{\eta \rightarrow 0} \|\psi_\eta\|_{L^1} = 0$. Ainsi $\lim_{\eta \rightarrow 0} \|\epsilon_\eta\psi_\eta\|_{L^1} = 0$ et donc $\lim_{\eta \rightarrow 0} \|g_\eta - \phi\|_{L^1} = 0$. Par conséquent, U est dense dans E qui est dense dans $L^1(\mathbb{R}^+)$. \square

Proposition B.2. *Il existe $\lambda_0 \geq \|\beta\|_{L^\infty} - \mu_0$ tel que $\mathcal{A} - \lambda_0 I$ est dissipatif.*

Preuve : On se sert de [153, Proposition 3.8, p. 89] dans lequel Webb utilise la notion d'opérateur accréatif (\mathcal{A} est accréatif si et seulement si $-\mathcal{A}$ est dissipatif). On sait que $\mathcal{A} - \lambda_0 I$ est dissipatif si et seulement si, pour tout $x \in D(\mathcal{A})$ et tout $\lambda > 0$, on a

$$\|\lambda x - \mathcal{A}x + \lambda_0 x\|_{\mathcal{X}} \geq \lambda \|x\|_{\mathcal{X}}.$$

Soient $(\phi, z) \in D(\mathcal{A})$ et $\lambda > 0$. On veut montrer que

$$\|\phi' + (\lambda + \mu + \lambda_0)\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} + |(\delta + \lambda + \lambda_0)z| \geq \lambda(\|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} + |z|)$$

pour un $\lambda_0 > 0$ assez grand. Il suffit en fait de vérifier que $\|\phi' + (\lambda + \mu + \lambda_0)\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \geq \lambda\|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}$. On pose $\psi = \phi' + (\lambda + \mu + \lambda_0)\phi$ et, après intégration, on obtient

$$\phi(a) = \phi(0)e^{-\int_0^a (\lambda + \lambda_0 + \mu(r))dr} + \int_0^a \psi(s)e^{-\int_s^a (\lambda + \lambda_0 + \mu(r))dr} ds$$

avec $\phi(0) = \int_0^{+\infty} \phi(a)\beta(a)da$. En intégrant par rapport à a , on obtient la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} &\leq \phi(0) \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^a (\lambda + \lambda_0 + \mu(r))dr} da + \int_0^{+\infty} \int_0^a \psi(s) e^{-\int_s^a (\lambda + \lambda_0 + \mu(r))dr} ds da \\ &\leq \phi(0) \int_0^{+\infty} e^{-a(\lambda + \lambda_0 + \mu_0)} da + \int_0^{+\infty} \int_0^a \psi(s) e^{(s-a)(\lambda + \lambda_0 + \mu_0)} ds da \\ &\leq \frac{\phi(0)}{\lambda + \lambda_0 + \mu_0} + \int_0^{+\infty} \psi(s) e^{s(\lambda + \lambda_0 + \mu_0)} \int_s^{+\infty} e^{-a(\lambda + \lambda_0 + \mu_0)} da ds \\ &\leq \frac{\|\phi\|_{L^1} \|\beta\|_{L^\infty} + \|\psi\|_{L^1}}{\lambda + \lambda_0 + \mu_0} \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\|\psi\|_{L^1} \geq (\lambda + \lambda_0 + \mu_0 - \|\beta\|_{L^\infty}) \|\phi\|_{L^1} \geq \lambda \|\phi\|_{L^1}$$

lorsque $\lambda_0 \geq \|\beta\|_{L^\infty} - \mu_0$. □

Proposition B.3. *Il existe $\omega_0 \geq \|\beta\|_{L^\infty} - \mu_0$ tel que, pour tout $\lambda \geq \omega_0$, l'opérateur $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif.*

Preuve : On se sert de [117, Lemme 4, p. 76] et on procède par analyse-synthèse. Soit $(\phi, z) \in \mathcal{X}$ et $\lambda > 0$. Si $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif, alors il existe $(\psi, y) \in D(\mathcal{A})$ tel que

$$(\lambda I - \mathcal{A}) \begin{pmatrix} \psi \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ z \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \psi' + (\lambda + \mu)\psi = \phi & \Leftrightarrow \psi(a) = \psi(0)e^{-\int_0^a (\lambda + \mu(r))dr} + \int_0^a \phi(s)e^{-\int_s^a (\lambda + \mu(r))dr} ds \\ (\lambda + \delta)y = z & \Leftrightarrow y = \frac{z}{\lambda + \delta} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

On a bien $y \in \mathbb{R}$ car $z \in \mathbb{R}$ et $\lambda, \delta > 0$. De plus, on veut que $\psi(0) = \int_0^{+\infty} \beta(a)\psi(a)da$, ce qui est équivalent à

$$\psi(0) = \int_0^{+\infty} \beta(a) \left[\psi(0)e^{-\int_0^a (\lambda + \mu(r))dr} + \int_0^a \phi(s)e^{-\int_s^a (\lambda + \mu(r))dr} ds \right] da.$$

Posons la fonction

$$G_\lambda : a \mapsto \int_0^a \phi(s)e^{-\int_s^a (\lambda + \mu(r))dr} ds$$

et le réel

$$F_\lambda = \int_0^{+\infty} \beta(a)e^{-\int_0^a (\lambda + \mu(r))dr} da.$$

Alors l'équation précédente est équivalente à

$$\psi(0) [F_\lambda - 1] + \int_0^{+\infty} \beta(a)G_\lambda(a)da = 0$$

d'où

$$\psi(0) = \frac{\int_0^{+\infty} \beta(a)G_\lambda(a)da}{1 - F_\lambda}.$$

On considère alors la fonction

$$f_\lambda : a \mapsto \frac{\int_0^{+\infty} \beta(u)G_\lambda(u)du}{1 - F_\lambda} e^{-\int_0^a (\lambda + \mu(s))ds} + G_\lambda(a).$$

Par conséquent, f_λ est solution de la première équation de (B.1) et vérifie

$$f_\lambda(0) = \int_0^{+\infty} \beta(a)f_\lambda(a)da.$$

Il ne reste donc plus qu'à montrer que $f_\lambda \in W^{1,1}(\mathbb{R}^+)$. Puisque

$$\beta(a)e^{-\int_0^a (\lambda + \mu(r))dr} \leq \beta(a)$$

qui est indépendant de λ et $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \beta(a)e^{-\int_0^a (\lambda + \mu(s))ds} = 0$, donc par convergence dominée, on obtient $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F_\lambda = 0$. De plus, comme $F_\lambda \geq 0$ pour tout $\lambda > 0$ alors il existe ω_0 assez grand tel que pour tout $\lambda \geq \omega_0$ on a $F_\lambda < 1$. Par conséquent, pour tout $\lambda \geq \omega_0$, $f_\lambda(a) \geq 0$ pour tout $a \geq 0$ et f_λ est bien définie.

De plus, on a

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |G_\lambda(a)|da &= \int_0^{+\infty} \int_0^a \phi(s)e^{-\int_s^a (\mu(r)+\lambda)dr} dsda \leq \int_0^{+\infty} \phi(s) \int_s^{+\infty} e^{(s-a)(\mu_0+\lambda)} dad s \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{\phi(s)}{\lambda + \mu_0} ds \leq \frac{\|\phi\|_{L^1}}{\lambda + \mu_0} < +\infty. \end{aligned}$$

On a ainsi $G_\lambda \in L^1(\mathbb{R}^+)$ et

$$\|f_\lambda\|_{L^1} \leq \frac{\int_0^{+\infty} \beta(u)G_\lambda(u)du \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^a (\lambda + \mu(s))ds} da}{1 - F_\lambda} + \|G_\lambda\|_{L^1}.$$

Donc

$$\|f_\lambda\|_{L^1} \leq \frac{\int_0^{+\infty} \beta(u)G_\lambda(u)du}{(1 - F_\lambda)(\lambda + \mu_0)} + \|G_\lambda\|_{L^1} \leq \frac{\|\beta\|_{L^\infty} \|G_\lambda\|_{L^1}}{(1 - F_\lambda)(\lambda + \mu_0)} + \|G_\lambda\|_{L^1} < +\infty.$$

Ainsi, $f_\lambda \in L^1(\mathbb{R}^+)$ et comme $(\lambda + \mu)f_\lambda + f'_\lambda = \phi$ alors on arrive à

$$\|f'_\lambda\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \leq \|\phi\|_{L^1} + (|\lambda| + \|\mu\|_{L^\infty})\|f_\lambda\|_{L^1} < +\infty.$$

Finalement $(f_\lambda, y) \in D(\mathcal{A})$. □

La génération d'un C_0 -semigroupe se montre grâce au théorème de Lumer-Phillips. La positivité du semigroupe se démontre en utilisant le Théorème A.4.2 où on est ramené à montrer la positivité de la résolvante de \mathcal{A} . On se sert ensuite de la preuve de la Proposition B.3 où l'on a vu que, pour λ assez grand, on a $y \geq 0$ et $f_\lambda(a) \geq 0$ pour tout $a \geq 0$ dès que $(\phi, z) \in \mathcal{X}_+$.

Bibliographie

- [1] ABRAMOVICH, Y. A., AND ALIPRANTIS, C. D. *Problems in Operator Theory*, vol. 51 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [2] AL-OMARI, J. F. A stage-structured predator–prey model with distributed maturation delay and harvesting. *journal of biological dynamics* 9, 1 (2015), 278–287.
- [3] APOSTOL, T. M. *Mathematical Analysis, Second Edition*. Reading. Addison-Wesley Publishing Co, 1974.
- [4] APUSHKINSKAYA, D. E., AND NAZAROV, A. I. A survey of results on nonlinear Venttsel problems. *Appl. Math.* 45, 1 (2000), 69–80.
- [5] ARINO, O. A survey of structured cell population dynamics. *Acta Biotheoretica* 43, 1 (1995), 3–25.
- [6] ARINO, O., DELGADO, M., AND MOLINA-BECERRA, M. Asymptotic behavior of disease-free equilibria of an age-structured predator-prey model with disease in the prey. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - series B* 4, 3 (2004), 501–515.
- [7] ARINO, O., SÁNCHEZ, E., AND WEBB, G. F. Necessary and sufficient conditions for asynchronous exponential growth in age structured cell populations with quiescence. *J. Math. Anal. Appl.* 215, 2 (1997), 499–513.
- [8] BACAËR, N. *A Short History of Mathematical Population Dynamics*. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011.
- [9] BAI, M., AND CUI, S. Well-posedness and asynchronous exponential growth of solutions of a two-phase cell division model. *Electron. J. Differential Equations* 2010 (2010), 1–12.
- [10] BAI, M., AND XU, S. On a two-phase size-structured population model with infinite states-at-birth and distributed delay in birth process. *J. Biol. Dyn.* 8, 1 (2014), 42–56.
- [11] BANKS, H. T., AND KAPPEL, F. Transformation semigroups and L^1 -approximation for size structured population models. *Semigroup Forum* 38, 1 (1989), 141–155.

-
- [12] BARRAQUAND, F. Functional responses and predator–prey models : a critique of ratio dependence. *Theoretical ecology* 7, 1 (2013), 3–20.
- [13] BARTŁOMIEJCZYK, A., AND LESZCZYŃSKI, H. Method of lines for physiologically structured models with diffusion. *Appl. Numer. Math.* 94 (2015), 140–148.
- [14] BARTŁOMIEJCZYK, A., AND LESZCZYŃSKI, H. Structured populations with diffusion and Feller conditions. *Math. Biosci. Eng.* 13, 2 (2016), 261–279.
- [15] BERETTA, E., CAPASSO, V., AND RINALDI, F. Global stability results for a generalized Lotka-Volterra system with distributed delays : applications to predator-prey and to epidemic systems. *J. Math. Biol.* 26, 6 (1988), 661–688.
- [16] BEREZANSKIĬ, I. U., SHEFTEL, Z. G., AND US, G. F. *Functional Analysis : Vol. II*. Advances in Life Sciences. Birkhäuser Verlag, 1996.
- [17] BHATTACHARYA, S., AND MARTCHEVA, M. Oscillations in a size-structure prey-predator model. *Math. Biosci.* 228, 1 (2010), 31–44.
- [18] BHATTACHARYA, S., MARTCHEVA, M., AND LI, X.-Z. A predator-prey-disease model with immune response in infected prey. *J. Math. Anal. Appl.* 411, 1 (2014), 297–313.
- [19] BILINSKY, L., AND HADELER, K. P. Quiescence stabilizes predator-prey relations. *J. Biol. Dyn.* 3, 2-3 (2009), 196–208.
- [20] BOBROWSKI, A. *Convergence of one-parameter operator semigroups*, vol. 30 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- [21] BRAUER, F., AND CASTILLO-CHAVEZ, C. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, second ed., vol. 40 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York, 2012.
- [22] BRÉZIS, H. *Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications*. Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Dunod, 1999.
- [23] BUTLER, G., AND WALTMAN, P. Persistence in dynamical systems. *J. Differential Equations* 63, 2 (1986), 255–263.
- [24] CALSINA, A., AND FARKAS, J. Z. Steady states in a structured epidemic model with Wentzell boundary condition. *J. Evol. Equ.* 12, 3 (2012), 495–512.
- [25] CALSINA, A., AND FARKAS, J. Z. On a strain-structured epidemic model. *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 31 (2016), 325–342.
- [26] CHARLESWORTH, B. *Evolution in Age-Structured Populations*, second ed., vol. 13 of *Cambridge Studies in Mathematical Biology*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [27] CHU, J., DUCROT, A., MAGAL, P., AND RUAN, S. Hopf bifurcation in a size-structured population dynamic model with random growth. *J. Differential Equations* 247, 3 (2009), 956–1000.

-
- [28] CHU, J., AND MAGAL, P. Hopf bifurcation for a size-structured model with resting phase. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 33, 11-12 (2013), 4891–4921.
- [29] CLÉMENT, P., HEIJMANS, H., ANGENENT, S., VAN DUIJN, C. J., AND DE PAGTER, B. *One-Parameter Semigroups*, vol. 5. North-Holland Publishing Co.(Amsterdam), 1987.
- [30] COLEMAN, C. S., AND FRAUENTHAL, J. C. Satiabile egg eating predators. *Mathematical Biosciences* 63, 1 (1983), 99–119.
- [31] CUSHING, J. M. *Integro-differential Equations and Delay Models in Population Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977. Lecture Notes in Biomathematics, Vol. 20.
- [32] CUSHING, J. M. *An Introduction to Structured Population Dynamics*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.
- [33] CUSHING, J. M., AND SALEEM, M. A predator prey model with age structure. *Journal of Mathematical Biology* 14, 2 (1982), 231–250.
- [34] DE PAGTER, B. Irreducible compact operators. *Mathematische Zeitschrift* 192, 1 (1986), 149–153.
- [35] DELGADO, M., MOLINA-BECERRA, M., AND SUÁREZ, A. Analysis of an age-structured predator–prey model with disease in the prey. *Nonlinear Analysis : Real World Applications* 7, 4 (2006), 853–871.
- [36] DIEKMANN, O., GETTO, P., AND GYLLENBERG, M. Stability and bifurcation analysis of volterra functional equations in the light of suns and stars. *SIAM journal on Mathematical Analysis* 39, 4 (2008), 1023–1069.
- [37] DIEKMANN, O., AND HEESTERBEEK, J. A. *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases*, vol. 5 of *Wiley Series in Mathematical and Computational Biology*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2000.
- [38] DIEKMANN, O., HEESTERBEEK, J. A., AND METZ, J. A. On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations. *J. Math. Biol.* 28, 4 (1990), 365–382.
- [39] DUBLIN, L., AND LOTKA, A. On the true rate of natural increase. *Journal of the American Statistical Association* 20, 151 (1925), 305–339.
- [40] DUCROT, A., AND MAGAL, P. Travelling wave solutions for an infection-age structured model with diffusion. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 139, 3 (2009), 459–482.
- [41] DUNFORD, N., AND SCHWARTZ, J. T. *Linear Operators. I. General Theory*, vol. 7 of *Pure and Applied Mathematics*. Interscience publishers, Inc., New York; Interscience publishers, Ltd., London, 1958.

- [42] DYSON, J., VILLELLA-BRESSAN, R., AND WEBB, G. F. A maturity structured model of a population of proliferating and quiescent cells. *Arch. Control Sci.* 9(45), 1-2 (1999), 201–225.
- [43] DYSON, J., VILLELLA-BRESSAN, R., AND WEBB, G. F. Asynchronous exponential growth in an age structured population of proliferating and quiescent cells. *Math. Biosci.* 177/178 (2002), 73–83.
- [44] EDELSTEIN-KESHET, L. *Mathematical Models in Biology*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- [45] ENGEL, K. J., AND NAGEL, R. *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, vol. 63. Springer-Verlag, 2000.
- [46] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*, second ed., vol. 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [47] FALCONI, M., HUENCHUCONA, M., AND VIDAL, C. Stability and global dynamic of a stage-structured predator–prey model with group defense mechanism of the prey. *Applied Mathematics and Computation* 270 (2015), 47–61.
- [48] FANG, J., GOURLEY, S. A., AND LOU, Y. Stage-structured models of intra-and inter-specific competition within age classes. *journal of Differential Equations* 260, 2 (2016), 1918–1953.
- [49] FARIA, T. Stability and bifurcation for a delayed predator-prey model and the effect of diffusion. *J. Math. Anal. Appl.* 254, 2 (2001), 433–463.
- [50] FARKAS, J. Z., AND HINOW, P. On a size-structured two-phase population model with infinite states-at-birth. *Positivity* 14, 3 (2010), 501–514.
- [51] FARKAS, J. Z., AND HINOW, P. Physiologically structured populations with diffusion and dynamic boundary conditions. *Mathematical Biosciences and Engineering* 8, 2 (2011), 503–513.
- [52] FAVINI, A., GOLDSTEIN, G. R., GOLDSTEIN, J. A., AND ROMANELLI, S. C_0 -semigroups generated by second order differential operators with general Wentzell boundary conditions. *Proc. Amer. Math. Soc.* 128, 7 (2000), 1981–1989.
- [53] FELLER, W. On the integral equation of renewal theory. *Ann. Math. Statistics* 12 (1941), 243–267.
- [54] FELLER, W. The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations. *Ann. of Math. (2)* 55 (1952), 468–519.
- [55] FELLER, W. Diffusion processes in one dimension. *Trans. Amer. Math. Soc.* 77 (1954), 1–31.
- [56] FREEDMAN, H., AND WALTMAN, P. Mathematical analysis of some three-species food-chain models. *Math. Biosci.* 33, 3-4 (1977), 257–276.

- [57] FREEDMAN, H. I., AND MOSON, P. Persistence definitions and their connections. *Proc. Amer. Math. Soc.* 109, 4 (1990), 1025–1033.
- [58] GABRIEL, P. Long-time asymptotics for nonlinear growth-fragmentation equations. *Commun. Math. Sci.* 10, 3 (2012), 787–820.
- [59] GAUSE, G. *The Struggle for Existence*. Williams and Wilkins, Baltimore, 1934.
- [60] GILBARG, D., AND TRUDINGER, N. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer Berlin, Germany, 1983.
- [61] GILPIN, M. E. Do hares eat lynx? *The American Naturalist* 107 (1973), 727–730.
- [62] GOLDSTEIN, G. R. Derivation and physical interpretation of general boundary conditions. *Adv. Differential Equations* 11, 4 (2006), 457–480.
- [63] GURTIN, M., AND MACCAMY, R. Nonlinear age-dependent population dynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 54, 3 (1974), 281–300.
- [64] GURTIN, M. E., AND LEVINE, D. S. On predator-prey interactions with predation dependent on age of prey. *Mathematical Biosciences* 47, 3 (1979), 207–219.
- [65] GYLLENBERG, M., AND WEBB, G. F. Age-size structure in populations with quiescence. *Math. Biosci.* 86, 1 (1987), 67–95.
- [66] GYLLENBERG, M., AND WEBB, G. F. A nonlinear structured population model of tumor growth with quiescence. *J. Math. Biol.* 28, 6 (1990), 671–694.
- [67] GYLLENBERG, M., AND WEBB, G. F. Quiescence in structured population dynamics : applications to tumor growth. In *Mathematical Population Dynamics (New Brunswick, NJ, 1989)*, vol. 131 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.* Dekker, New York, 1991, pp. 45–62.
- [68] GYLLENBERG, M., AND WEBB, G. F. Asynchronous exponential growth of semigroups of nonlinear operators. *journal of mathematical analysis and applications* 167, 2 (1992), 443–467.
- [69] HADELER, K. P. Homogeneous systems with a quiescent phase. *Math. Model. Nat. Phenom.* 3, 7 (2008), 115–125.
- [70] HADELER, K. P. Structured populations with diffusion in state space. *Mathematical Biosciences and Engineering* 7, 1 (2010), 37–49.
- [71] HADELER, K. P. Quiescent phases and stability in discrete time dynamical systems. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* 20, 1 (2015), 129–152.
- [72] HADELER, K. P., AND THIEME, H. R. Monotone dependence of the spectral bound on the transition rates in linear compartment models. *J. Math. Biol.* 57, 5 (2008), 697–712.
- [73] HALE, J. K., AND LUNEL, S. M. *Introduction to Functional Differential Equations*, vol. 99 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1993.

-
- [74] HASTINGS, A. *Population Biology, Concepts and Models*. Springer, New York, 1998.
- [75] HEESTERBEEK, J. A brief history of R_0 and a recipe for its calculation. *Acta biotheoretica* 50, 3 (2002), 189–204.
- [76] HENING, A., AND NGUYEN, D. H. Stochastic Lotka–Volterra food chains. *J. Math. Biol.* 77, 1 (2018), 135–163.
- [77] HILLE, E., AND PHILLIPS, R. S. *Functional Analysis and Semigroups*, vol. 31 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1957.
- [78] HILLION, A. *Les Théories Mathématiques des Populations*, vol. 2258 of *Que Sais-Je ? [What Do I Know ?]*. Presses Universitaires de France, Paris, 1986.
- [79] HOLLING, C. S. The components of predation as revealed by a study of small-mammal predation of the european pine sawfly. *The Can. Ent.* 91 (1959), 293–320.
- [80] HOSONO, Y. Traveling waves for the Lotka–Volterra predator–prey system without diffusion of the predator. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-series B* 20, 1 (2015), 161–171.
- [81] HUANG, G., TAKEUCHI, Y., MA, W., AND WEI, D. Global stability for delay SIR and SEIR epidemic models with nonlinear incidence rate. *Bull. Math. Biol.* 72, 5 (2010), 1192–1207.
- [82] IANNELLI, M. *Mathematical Theory of Age-structured Population Dynamics*. Giardini Editori e stampatori, 1994.
- [83] IANNELLI, M., MARTCHEVA, M., AND MILNER, F. A. *Gender-Structured Population Modeling*, vol. 31 of *Frontiers in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2005.
- [84] IANNELLI, M., AND MILNER, F. *The Basic Approach to Age-Structured Population Dynamics*. Lecture Notes on Mathematical Modelling in the Life Sciences. Springer, Dordrecht, 2017.
- [85] IANNELLI, M., AND PUGLIESE, A. *An Introduction to Mathematical Population Dynamics*, vol. 79 of *Unitext*. Springer, Cham, 2014.
- [86] INABA, H. *Age-Structured Population Dynamics in Demography and Epidemiology*. Springer, Singapore, 2017.
- [87] JOST, C., AND AL. The wolves of isle royale display scale-invariant satiation and ratio-dependent predation on moose. *journal of Animal Ecology* 74 (2005), 809–816.
- [88] KOLMOGOROV, A., PETROVSKII, I., AND PISCUNOV, N. A study of the equation of diffusion with increase in the quantity of matter, and its application to a biological problem. *Byul. Moskovskogo Gos. Univ.* 1, 6 (1937), 1–25.

-
- [89] LANGA, J. A., ROBINSON, J. C., RODRÍGUEZ-BERNAL, A., AND SUÁREZ, A. Permanence and asymptotically stable complete trajectories for nonautonomous Lotka-Volterra models with diffusion. *SIAM journal on Mathematical Analysis* 40, 6 (2009), 2179–2216.
- [90] LANGLAIS, M., AND MILNER, F. A. Existence and uniqueness of solutions for a diffusion model of host-parasite dynamics. *J. Math. Anal. Appl.* 279, 2 (2003), 463–474.
- [91] LEVINE, D. S. On the stability of a predator-prey system with egg-eating predators. *Mathematical Biosciences* 56, 1 (1981), 27–46.
- [92] LEVINE, D. S. Bifurcating periodic solutions for a class of age-structured predator-prey systems. *Bulletin of mathematical biology* 45, 6 (1983), 901–915.
- [93] LI, J. Dynamics of age-structured predator-prey population models. *journal of mathematical analysis and applications* 152, 2 (1990), 399–415.
- [94] LIU, S., CHEN, L., AND AGARWAL, R. Recent progress on stage-structured population dynamics. *Mathematical and Computer Modelling* 36, 11 (2002), 1319–1360.
- [95] LIU, Z., AND LI, N. Stability and bifurcation in a predator-prey model with age structure and delays. *journal of Nonlinear Science* 25, 4 (2015), 937–957.
- [96] LOGAN, J. D., LEDDER, G., AND WOLESENSKY, W. Type II functional response for continuous, physiologically structured models. *J. Theoret. Biol.* 259, 2 (2009), 373–381.
- [97] LOTKA, A. J. *Elements of Physical Biology*. Williams and Wilkins company, Baltimore, 1925.
- [98] LU, Y., AND LIU, S. Threshold dynamics of a predator-prey model with age-structured prey. *Adv. Difference Equ.* (2018), 2018 :164.
- [99] LUO, Z., HE, Z.-R., AND LI, W.-T. Optimal birth control for predator-prey system of three species with age-structure. *Applied mathematics and computation* 155, 3 (2004), 665–685.
- [100] LUO, Z., LIN, Y., AND DAI, Y. Rank one chaos in periodically kicked Lotka-Volterra predator-prey system with time delay. *Nonlinear Dynam.* 85, 2 (2016), 797–811.
- [101] MAGAL, P., AND RUAN, S. *Structured Population Models in Biology and Epidemiology*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [102] MAREK, I. Frobenius theory of positive operators : comparison theorems and applications. *SIAM journal on Applied Mathematics* 19, 3 (1970), 607–628.
- [103] MAY, R. M. *Stability and Complexity in Model Ecosystems*. Princeton University Press, Princeton, 1973.

- [104] MAY, R. M. Time-delay versus stability in population models with two and three trophic levels. *Ecology* 54, 2 (1973), 315–325.
- [105] MCKENDRICK, A. G. Applications of mathematics to medical problems. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* 44 (1925), 98–130.
- [106] METZ, J. A., AND DIEKMANN, O. *The Dynamics of Physiologically Structured Populations*. Lecture Notes in Biomathematics. Springer Berlin Heidelberg, 1986.
- [107] MILNER, F. A., AND PATTON, C. A. A diffusion model for host-parasite interaction. *J. Comput. Appl. Math.* 154, 2 (2003), 273–302.
- [108] MOKHTAR-KHARROUBI, M. *Mathematical Topics in Neutron Transport Theory : New Aspects*, vol. 46. World Scientific, 1997.
- [109] MOKHTAR-KHARROUBI, M. On the convex compactness property for the strong operator topology and related topics. *Mathematical methods in the applied sciences* 27, 6 (2004), 687–701.
- [110] MOKHTAR-KHARROUBI, M. Spectral theory for neutron transport. In *Evolutionary Equations with Applications in Natural Sciences*, J. Banasiak and M. Mokhtar-Kharroubi, Eds. Springer, 2015, pp. 319–386.
- [111] MOKHTAR-KHARROUBI, M., AND RICHARD, Q. Time asymptotics of structured populations with diffusion and dynamic boundary conditions. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B* 22 (2018), 1.
- [112] MURRAY, J. D. *Mathematical Biology*. Biomathematics. Springer Verlag, Heiderberg, 1989.
- [113] NAGEL, R., ARENDT, W., GRABOSCH, A., GREINER, G., GROH, U., LOTZ, H. P., MOUSTAKAS, U., NEUBRANDER, F., AND SCHLOTTERBECK, U. *One-Parameter Semigroups of Positive Operators*, vol. 1184. Springer-Verlag Berlin, 1986.
- [114] OKUBO, A. *Diffusion and Ecological Problems : Mathematical Models*, vol. 10 of *Biomathematics*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.
- [115] PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 1983.
- [116] PENG, M., ZHANG, Z., AND WANG, X. Hybrid control of Hopf bifurcation in a Lotka-Volterra predator-prey model with two delays. *Adv. Difference Equ.* 2017, 1 (2017), 387.
- [117] PERASSO, A. *Parameter identifiability for systems described by partial differential equations. Application to population dynamics*. Theses, Université Paris Sud - Paris XI, Nov. 2009.
- [118] PERASSO, A. Global stability and uniform persistence for an infection load-structured si model with exponential growth velocity. *Communications on Pure and Applied Analysis* 18 (2019), 15.

-
- [119] PERASSO, A., AND RAZAFISON, U. Infection load structured SI model with exponential velocity and external source of contamination. In *World Congress on Engineering* (United Kingdom, 2013), pp. 263–267.
- [120] PERASSO, A., AND RAZAFISON, U. Asymptotic behavior and numerical simulations for an infection load-structured epidemiological model : application to the transmission of prion pathologies. *SIAM journal on Applied Mathematics* 74, 5 (2014), 1571–1597.
- [121] PERASSO, A., AND RICHARD, Q. Implication of age-structure on the dynamics of Lotka-Volterra equations. *to appear in Differential and Integral Equations*.
- [122] PERTHAME, B. *Transport Equations in Biology*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser, Basel, 2007.
- [123] PESKIR, G. On boundary behaviour of one-dimensional diffusions : from Brown to Feller and beyond. *William Feller-Selected Papers II*. Springer, Berlin (2015), 77–93.
- [124] PROTTER, M. H., AND WEINBERGER, H. F. *Maximum Principles in Differential Equations*. Springer Verlag, 1984.
- [125] ROSENZWEIG, M. L., AND MACARTHUR, R. H. Graphical representation and stability conditions of predator-prey interactions. *The American Naturalist* 97, 895 (1963), 209–223.
- [126] ROSSA, B. Quiescence as an explanation for asynchronous exponential growth in a size structured cell population of exponentially growing cells. I. In *Advances in Mathematical Population Dynamics—Molecules, Cells and Man (Houston, TX, 1995)*, vol. 6 of *Ser. Math. Biol. Med.* World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1997, pp. 223–239.
- [127] ROTENBERG, M. Transport theory for growing cell populations. *J. Theoret. Biol.* 103, 2 (1983), 181–199.
- [128] ROTHE, F. The periods of the Volterra-Lotka system. *J. Reine Angew. Math.* 355 (1985), 129–138.
- [129] SALEEM, M. Predator-prey relationships : egg-eating predators. *Mathematical Biosciences* 65, 2 (1983), 187–197.
- [130] SALEEM, M. Egg-eating age-structured predators in interaction with age-structured prey. *Mathematical Biosciences* 70, 1 (1984), 91–104.
- [131] SALEEM, M. Predator-prey relationships : indiscriminate predation. *Journal of Mathematical Biology* 21, 1 (1984), 25–34.
- [132] SHARPE, F. R., AND LOTKA, A. J. A problem in age-distribution. *Philosophical Magazine series 6* 21 (1911), 435–438.

-
- [133] SHI, C., CHEN, X., AND WANG, Y. Feedback control effect on the Lotka-Volterra prey-predator system with discrete delays. *Adv. Difference Equ.* 2017, 1 (2017), 373.
- [134] SINKO, J. W., AND STREIFER, W. A new model for age-size structure of a population. *Ecology* 48, 6 (1967), 910–918.
- [135] SKELLAM, J. G. Random dispersal in theoretical populations. *Biometrika* 38 (1951), 196–218.
- [136] SKELLAM, J. G. The formulation and interpretation of mathematical models of diffusionary processes in population biology. In *The Mathematical Theory of the Dynamics of Biological Populations* (New York : Academic Press, 1973), vol. 63.
- [137] SLÜCHTERMANN, G. On weakly compact operators. *Mathematische Annalen* 292, 1 (1992), 263–266.
- [138] SMITH, H. *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*, vol. 57. Springer Science & Business Media, 2010.
- [139] SOLOMON, M. E. The natural control of animal populations. *The journal of Animal Ecology* (1949), 1–35.
- [140] TANG, H., AND LIU, Z. Hopf bifurcation for a predator–prey model with age structure. *Applied Mathematical Modelling* 40, 2 (2016), 726–737.
- [141] THIEME, H. R. Balanced exponential growth of operator semigroups. *J. Math. Anal. Appl.* 223, 1 (1998), 30–49.
- [142] THIEME, H. R. *Mathematics in Population Biology*. Mathematical Biology series. Princeton University Press, 2003.
- [143] THIEME, H. R. Spectral bound and reproduction number for infinite-dimensional population structure and time heterogeneity. *SIAM journal on Applied Mathematics* 70, 1 (2009), 188–211.
- [144] THOMPSON, R. W., DIBIASIO, D., AND MENDES, C. Predator-prey interactions : egg-eating predators. *Mathematical Biosciences* 60, 1 (1982), 109–120.
- [145] TURCHIN, P. *Complex Population Dynamics : a Theoretical/Empirical Synthesis*, vol. 35 of *Monographs in Population Biology*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.
- [146] VARGAS-DE-LEÓN, C. Lyapunov functionals for global stability of Lotka–Volterra cooperative systems with discrete delays. *Abstraction and Application, submitted for publication* (2015).
- [147] VENTURINO, E. Age-structured predator-prey models. *Mathematical Modelling* 5, 2 (1984), 117–128.
- [148] VOIGT, J. On resolvent positive operators and positive c_0 -semigroups on AL-spaces. *Semigroup Forum* 38, 1 (1989), 263–266.

- [149] VOLTERRA, V. Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically. *Nature* 118 (1926), 558–560.
- [150] VON FOERSTER, H. Some remarks on changing populations. *The Kinetics of Cellular Proliferation* (1959), 382–407.
- [151] WALDSTÄTTER, R., HADELER, K. P., AND GREINER, G. A Lotka-McKendrick model for a population structured by the level of parasitic infection. *SIAM J. Math. Anal.* 19, 5 (1988), 1108–1118.
- [152] WEBB, G. F. A semigroup proof of the Sharpe-Lotka theorem. In *Infinite-dimensional systems (Retzhof, 1983)*, vol. 1076 of *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin, 1984, pp. 254–268.
- [153] WEBB, G. F. *Theory of Nonlinear Age-Dependent Population Dynamics*. Marcel Dekker, New York, 1985.
- [154] WEBB, G. F. An operator-theoretic formulation of asynchronous exponential growth. *Transactions of the American Mathematical Society* 303, 2 (1987), 751–763.
- [155] WEBB, G. F. Population models structured by age, size, and spatial position. In *Structured Population Models in Biology and Epidemiology*, vol. 1936 of *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin, 2008, pp. 1–49.
- [156] WEIS, L. W. A generalization of the Vidav-Jorgens perturbation theorem for semigroups and its application to transport theory. *Journal of Mathematical Analysis and Application* 129, 1 (1988), 6–23.
- [157] WENTZELL, A. D. On boundary conditions for multi-dimensional diffusion processes. *Theor. Probability Appl.* 4 (1959), 164–177.
- [158] XU, C., LIAO, M., AND HE, X. Stability and Hopf bifurcation analysis for a Lotka-Volterra predator-prey model with two delays. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.* 21, 1 (2011), 97–107.
- [159] YAN, S., AND GUO, S. Bifurcation phenomena in a Lotka-Volterra model with cross-diffusion and delay effect. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* 27, 7 (2017), 1750105, 24.
- [160] YOSIDA, K. *Functional Analysis*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [161] YÜZBAŞI, C., AND KARAÇAYIR, M. A numerical method for solutions of Lotka-Volterra predator-prey model with time-delay. *Int. J. Biomath.* 11, 2 (2018), 1850028, 16.

Résumé

Dans cette thèse nous regardons plusieurs modèles de populations structurées s'écrivant à l'aide d'équations de transport. Le caractère bien-posé ainsi que la positivité des solutions sont montrés de manière systématique au sens des semigroupes dans un cadre L^1 . Un premier travail est consacré à un système de type proie-prédateur structuré en âge. Une étude de stabilité des équilibres nous permet de fomuler explicitement un seuil d'extinction ainsi qu'un seuil pouvant amener à l'explosion des populations. On obtient numériquement la possibilité d'un cycle limite ainsi que la convergence vers un équilibre de coexistence des populations. Dans un cas particulier, ce modèle se réécrit comme un système différentiel à retard. À l'aide de fonctionnelle de Lyapunov, on montre la stabilité globale de cet équilibre sous certaines conditions. On étudie également deux modèles structurés en taille, issus de la dynamique cellulaire. L'un est composé de deux équations de transport où la cellule peut être soit proliférante soit quiescente; et le deuxième est une équation de type transport/diffusion avec des conditions aux bords de Feller. On vérifie à chaque fois l'irréductibilité du semigroupe puis des arguments de faible compacité L^1 nous donnent l'existence d'un 'gap spectral' sous certaines conditions. On démontre ainsi dans certains cas la croissance exponentielle asynchrone du semigroupe.

Mots-clés : équations de transport, de transport-diffusion et à retard, modèles structurés en âge et en taille, asynchronicité, stabilité, dynamiques cellulaires, interactions proie-prédateur, conditions aux bords de Feller, compacité faible L^1 , gap spectral.

Abstract

In this thesis we look at some structured populations models described with transport equations. The well-posedness and the positivity of the solutions are systematically shown in the semigroups setting in a L^1 framework. A first work is dedicated to a age-structured predator/prey system. A stability study of the equilibria allow us to give explicit formulations of an extinction threshold and an threshold which can lead to explosion of solutions. We numerically obtain the possibility to get a limit cycle and the convergence to a coexistence equilibrium of the populations. In a specific case, this model rewrites as a delay differential system. Using Lyapunov functional, we show the global stability of this equilibrium under some assumptions. We also study two size-structured models that come from cellular dynamics. The first one consists on two transport equations, where the cell can either proliferate or be quiescent, and the second one is a transport/diffusion equation with Feller boundary conditions. We check each time the irreducibility of the semigroupe then some weak compactness arguments in L^1 imply the existence of a 'spectral gap' under some assumptions. We thus prove in some cases the asynchronous exponential growth of the semigroup.

Keywords : Transport, transport-diffusion and delay equations, age and size structured models, asynchronicity, stability, cellular dynamics, predator-prey interactions, Feller boundary conditions, weak compactness in L^1 , spectral gap.

MSC 2010 : 35B35, 35B40, 47D06, 65M08, 92D25, 92C37.