

Introduction

En Franche-Comté, le renard roux *V. Vulpes* se nourrit surtout de rongeurs tels que les campagnols des champs (*M. Arvalis*) et terrestres (*A. Scherman*). L'objectif est d'écrire un modèle mathématique décrivant l'évolution de ces trois populations au cours du temps. On utilisera un modèle proies-prédateur composé d'EDO.

$$\text{Système : } \begin{cases} x'(t) = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) - \phi_x(x(t), y(t))z(t), \forall t \geq 0, \\ y'(t) = ry(t) \left(1 - \frac{y(t)}{k}\right) - \phi_y(x(t), y(t))z(t), \\ z'(t) = \alpha\phi_x(x(t), y(t))z(t) + \beta\phi_y(x(t), y(t))z(t) - mz(t), \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0, \end{cases}$$

Notations : x, y, z : densités de *M. Arvalis*, *A. Scherman* et *V. Vulpes* ; m : taux de mort du prédateur, k : capacité d'accueil des milieux de proies ; α et β : coefficients d'assimilation, $1/h$: taux d'ingestion maximal de chaque prédateur ; r : taux de croissance des deux proies, ϕ_x et ϕ_y : réponses fonctionnelles du prédateur sur les proies x et y , a_1, a_2 : taux d'attaque sur les proies x et y .

Exemples de réponses fonctionnelles :

Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \phi_x(x, y) = a_1x \\ \phi_y(x, y) = a_2y \end{cases}$$

Holling 2

$$\begin{cases} \phi_x(x, y) = \frac{a_1x}{1 + a_1hx + a_2hy} \\ \phi_y(x, y) = \frac{a_2y}{1 + a_1hx + a_2hy} \end{cases}$$

Holling 3

$$\begin{cases} \phi_x(x, y) = \frac{a_1x^2}{1 + a_1hx^2 + a_2hy^2} \\ \phi_y(x, y) = \frac{a_2y^2}{1 + a_1hx^2 + a_2hy^2} \end{cases}$$

Hypothèses : $\alpha = \beta \in]0, 1]$, $x_0, y_0, z_0, h, a_1, a_2, r, k$ et $m > 0$.

États d'équilibres

7 équilibres positifs maximum. $E_1 = (0, 0, 0)$, $E_2 = (k, 0, 0)$, $E_3 = (0, k, 0)$ instables : deux espèces ne peuvent pas disparaître simultanément avec des conditions initiales strictement positives. $E_4 = (k, k, 0)$, $E_5 = (x_5, 0, z_5)$, $E_6 = (0, x_6, z_6)$, $E_7 = (x_7, y_7, z_7)$. Pour : $r = 3, k = 100, \alpha = 0.75, m = 0.5, h = 1$ fixés. Analyse de bifurcation selon les taux de prédation a_1 et a_2 . 4 zones distinctes avec Lotka-Volterra dans lesquelles un unique équilibre est localement asymptotiquement stable (LAS) (figure 1). Une cinquième zone avec Holling 2,3 (figure 2) dans laquelle aucun n'est stable.

Portraits de phase avec Lotka-Volterra

- E_4 LAS (zone rouge) : le prédateur s'éteint par manque de ressource (figure 3).

- E_5 LAS, resp E_6 (zone cyan, resp verte) : la proie 2, resp 1 disparaît. Le prédateur a une trop forte pression sur une proie (préférence alimentaire ou plus grande facilité à l'attraper), celle-ci finit par s'éteindre (figures 4 et 5).

- E_7 LAS (zone noire), cohabitation des 3 populations (figure 6).

Problèmes : réponse fonctionnelle linéaire, impliquant une prédation non majorée. Dans le cas du renard, il est pertinent d'inclure un phénomène de **saturation** (satiété, temps de consommation, ...) avec les fonctions de Holling II et III [1].

Holling 2 et 3

Lorsqu'aucun équilibre n'est stable (zone bleue), apparition de cycles limites. Si $a_1 > a_2$, le cycle est courbé du côté $y > x$. Le prédateur va tuer une grande densité de proie 1. Ensuite, la densité de prédateur diminue par manque de nourriture. Enfin les proies se reproduisent lorsque la prédation est trop faible (en premier, la proie 2, que le prédateur aime le moins). Si $a_1 = a_2$, le cycle limite est symétrique par rapport au plan $y = x$.

Différences : le cycle limite longe l'axe (Oy) avec Holling 2 (figure 7) contrairement à Holling 3 (figure 8). Holling 3 inclue le **switching** [2] de préférence qui permet de diminuer la pression sur la proie en plus faible densité relative (figure 9).

Conclusion

- Lotka-Volterra peu réaliste dans notre cas puisque prédation linéaire donc sans limite et proportionnelle à la densité des proies (vrai pour les prédateurs passifs tels que les araignées : les mouches tombent dans la toile).
- Holling 2 plus réaliste car la prédation dépend de la densité des deux proies et prend en compte la satiété du prédateur.
- Holling 3 prend en compte le switching lors de faibles densités de proies ce qui rend compte par exemple d'une faible détectabilité des proies à faible densité. Il permet ainsi une meilleure coexistence des proies et donc un maintien de la biodiversité de ces dernières.

References

- [1] C.S. HOLLING : The components of predation as revealed by a study of small-mammal predation of the european pine sawfly. *The Can. Ent.*, 91:pp. 293-320, (1959).
- [2] W. W. MURDOCH : Switching in general predators: Experiments on predator specificity and stability of prey populations. *Ecological Monographs*, 39(4):pp. 335-354, (1969).

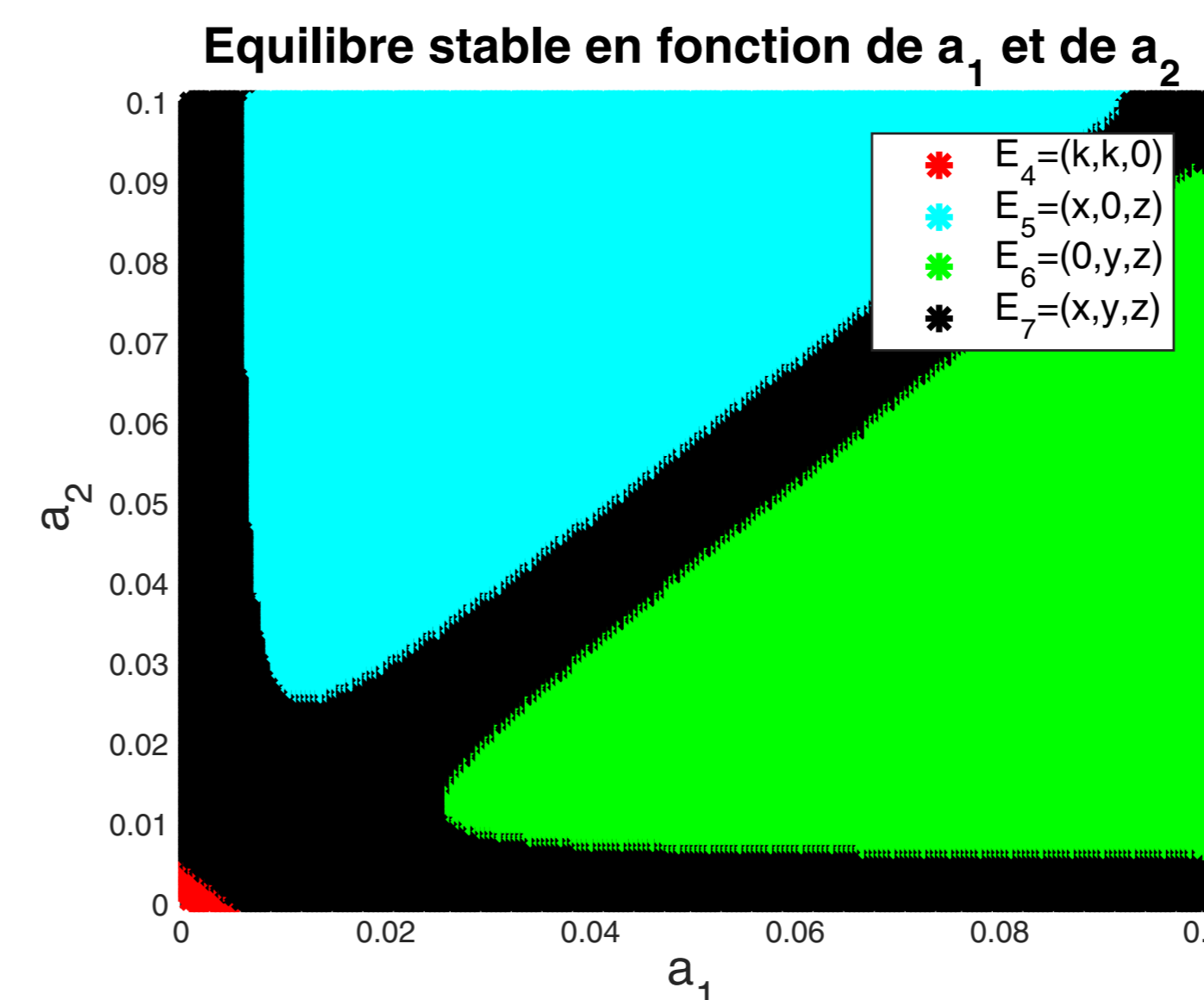


Figure 1: Bifurcations pour Lotka-Volterra

Portrait de phase avec Lotka-Volterra, a1=0.001 et a2=0.001

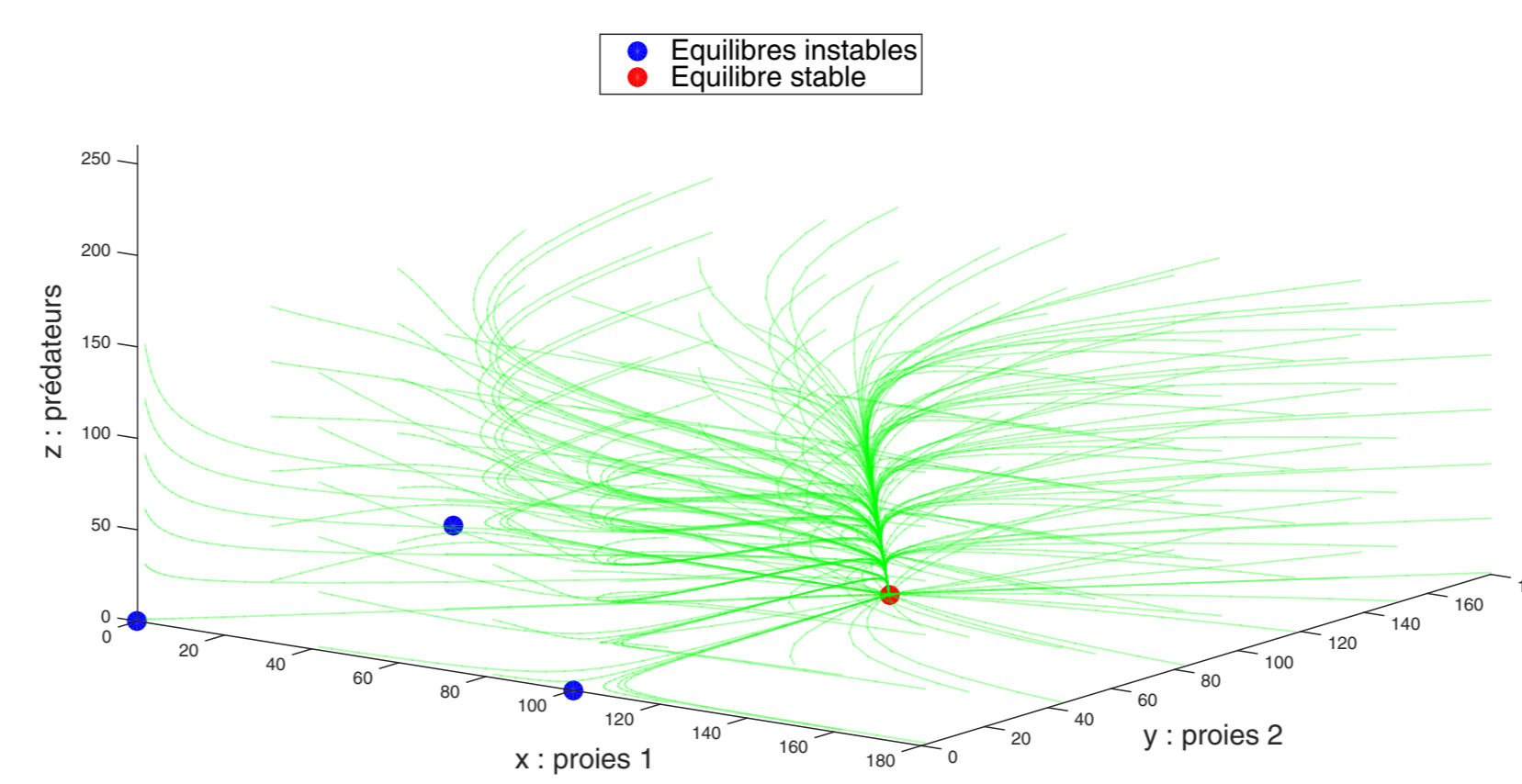


Figure 3: Convergence vers E_4

Portrait de phase avec Lotka-Volterra, a1=0.06 et a2=0.03

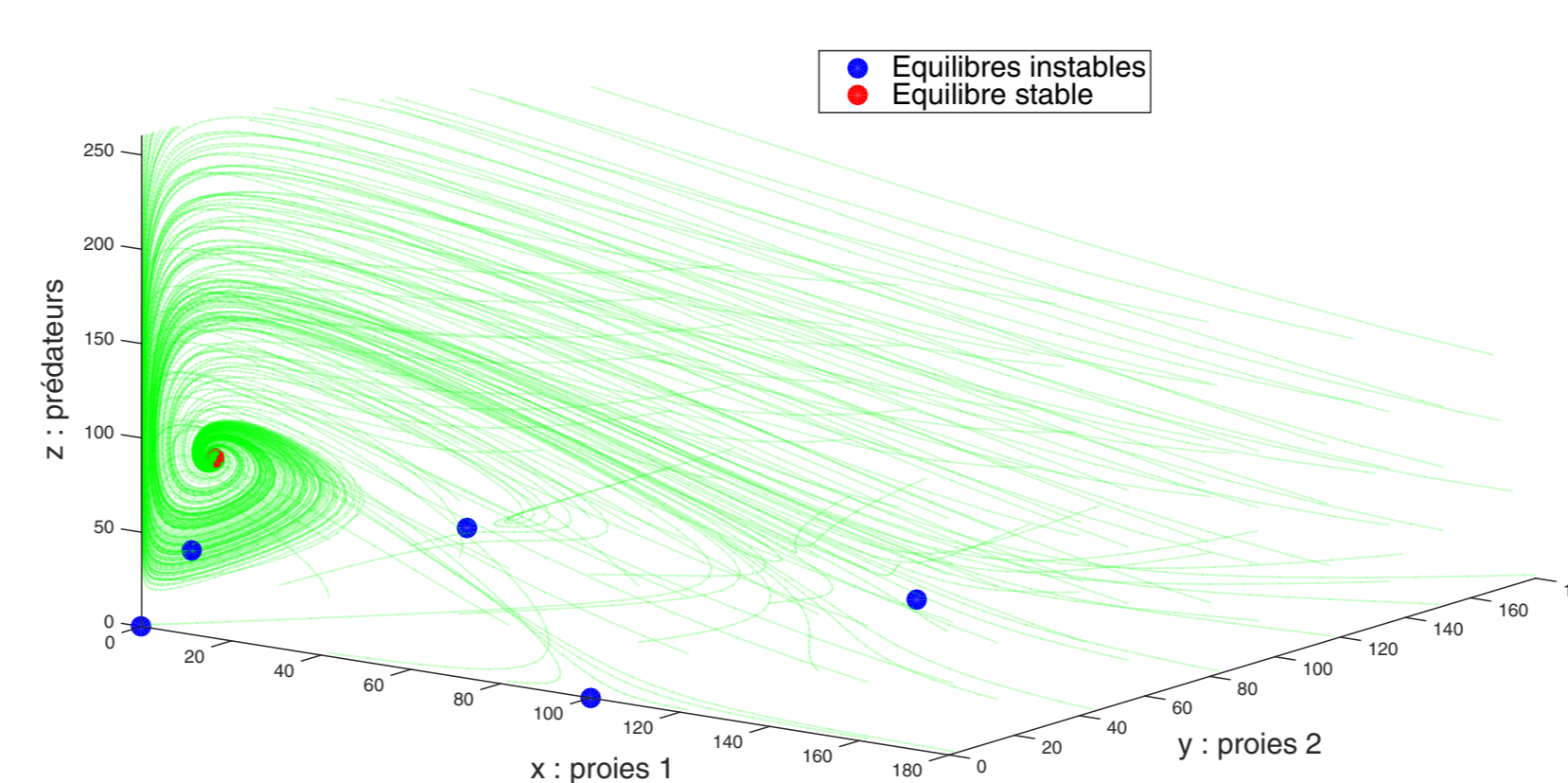


Figure 5: Convergence vers E_6

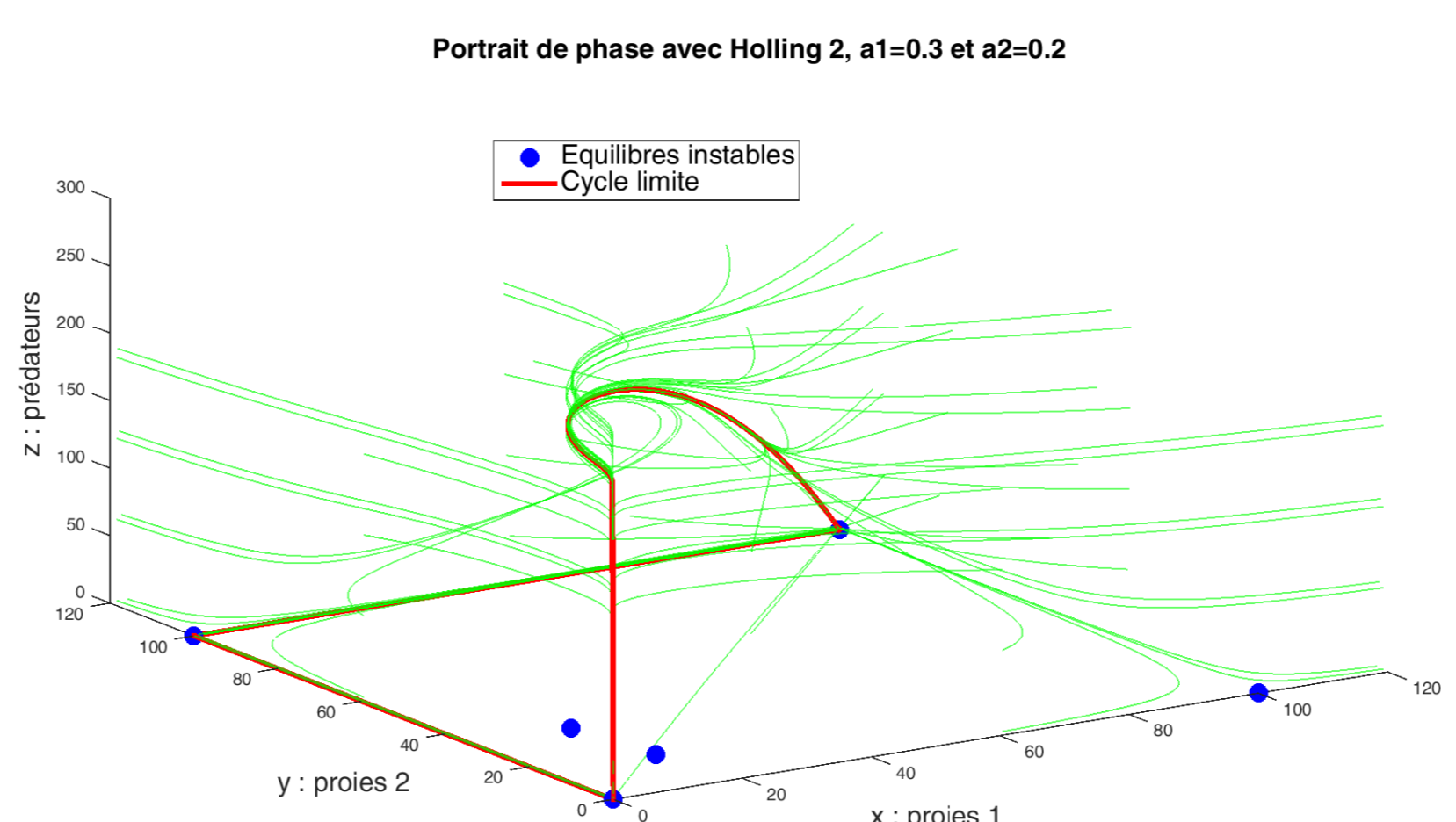


Figure 7: Cycle limite avec Holling 2

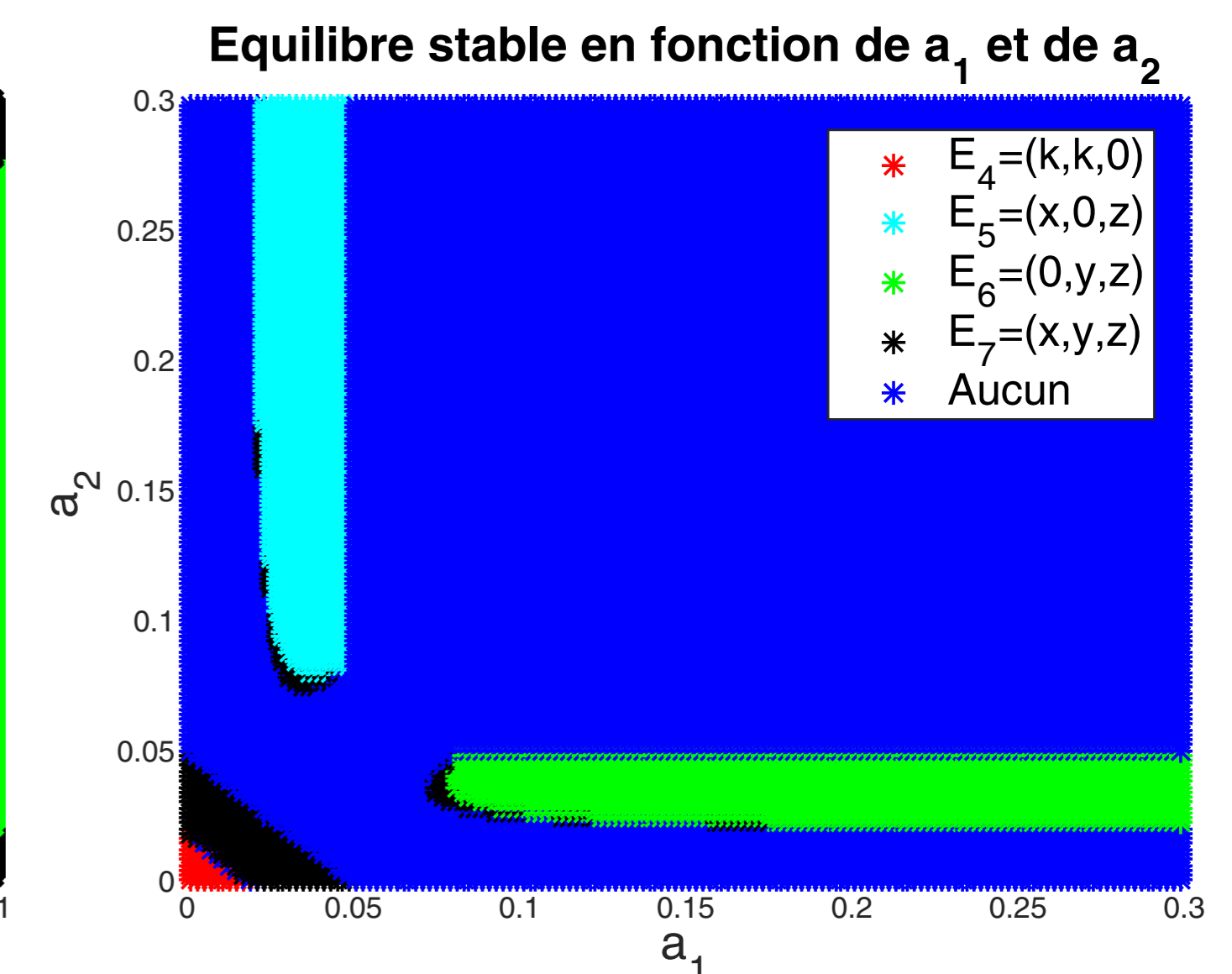


Figure 2: Bifurcations pour Holling 2 et 3

Portrait de phase avec Lotka-Volterra, a1=0.03 et a2=0.06

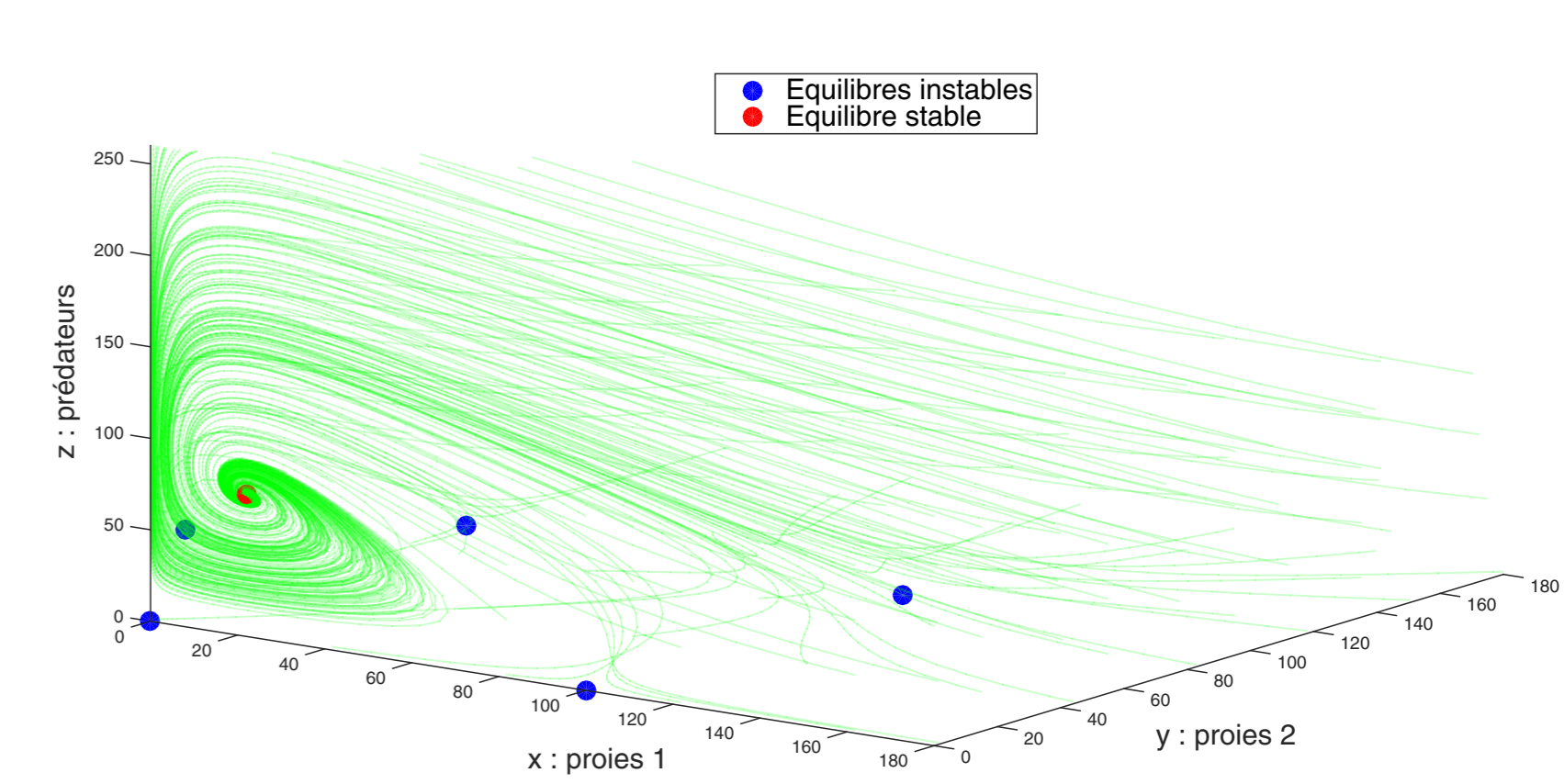


Figure 4: Convergence vers E_5

Portrait de phase avec Lotka-Volterra, a1=0.03 et a2=0.03

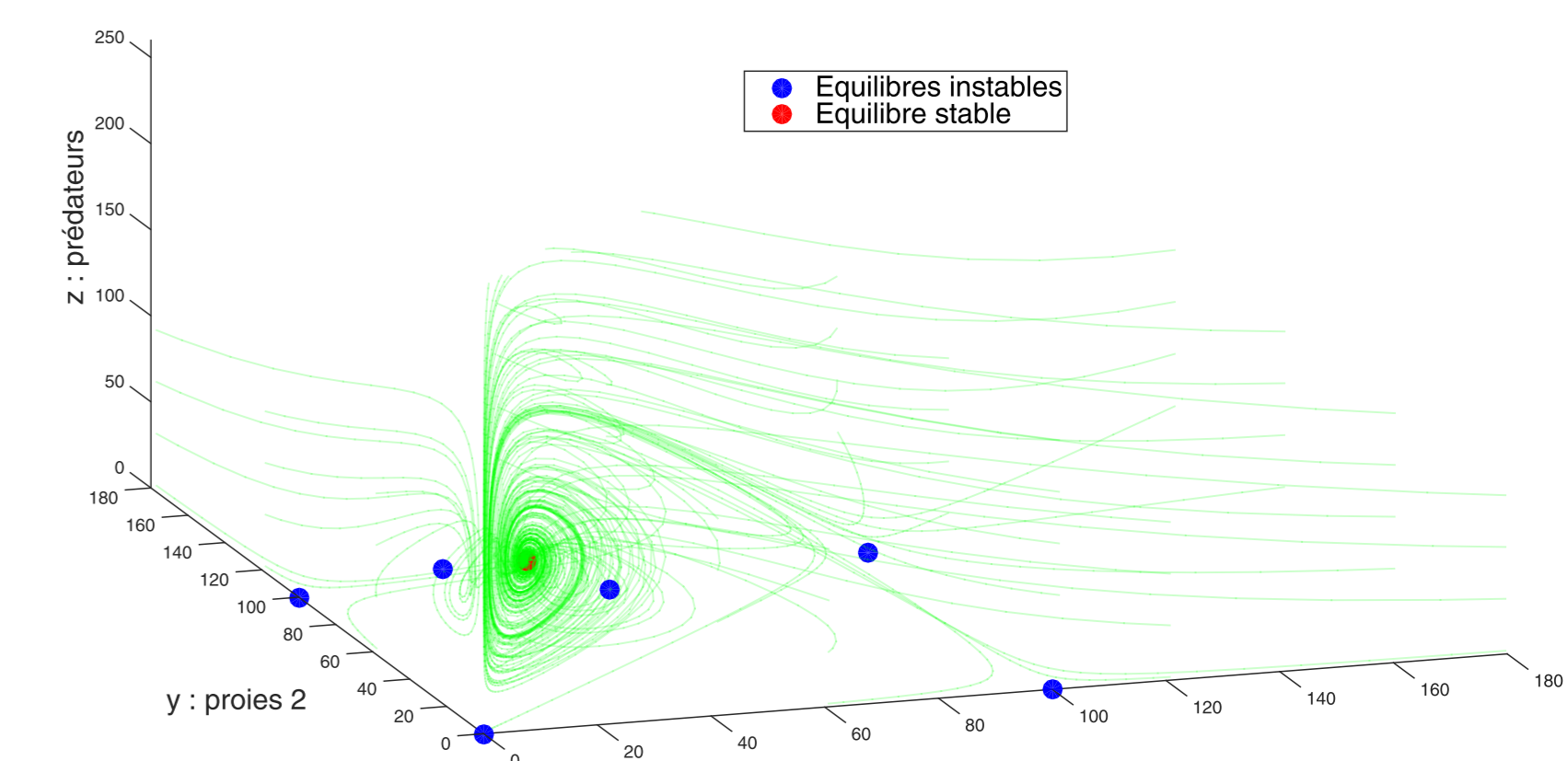


Figure 6: Convergence vers E_7

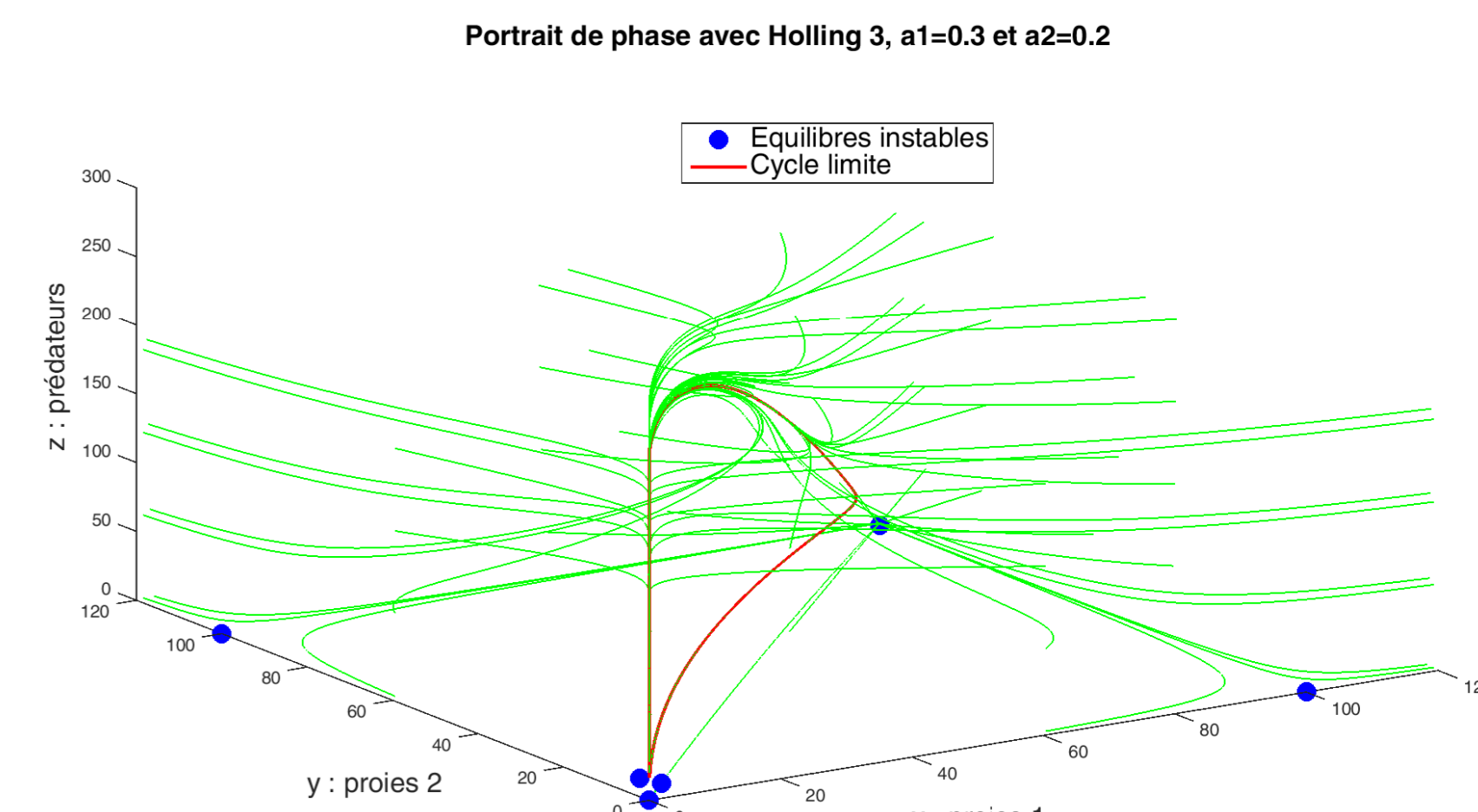


Figure 8: Cycle limite avec Holling 3

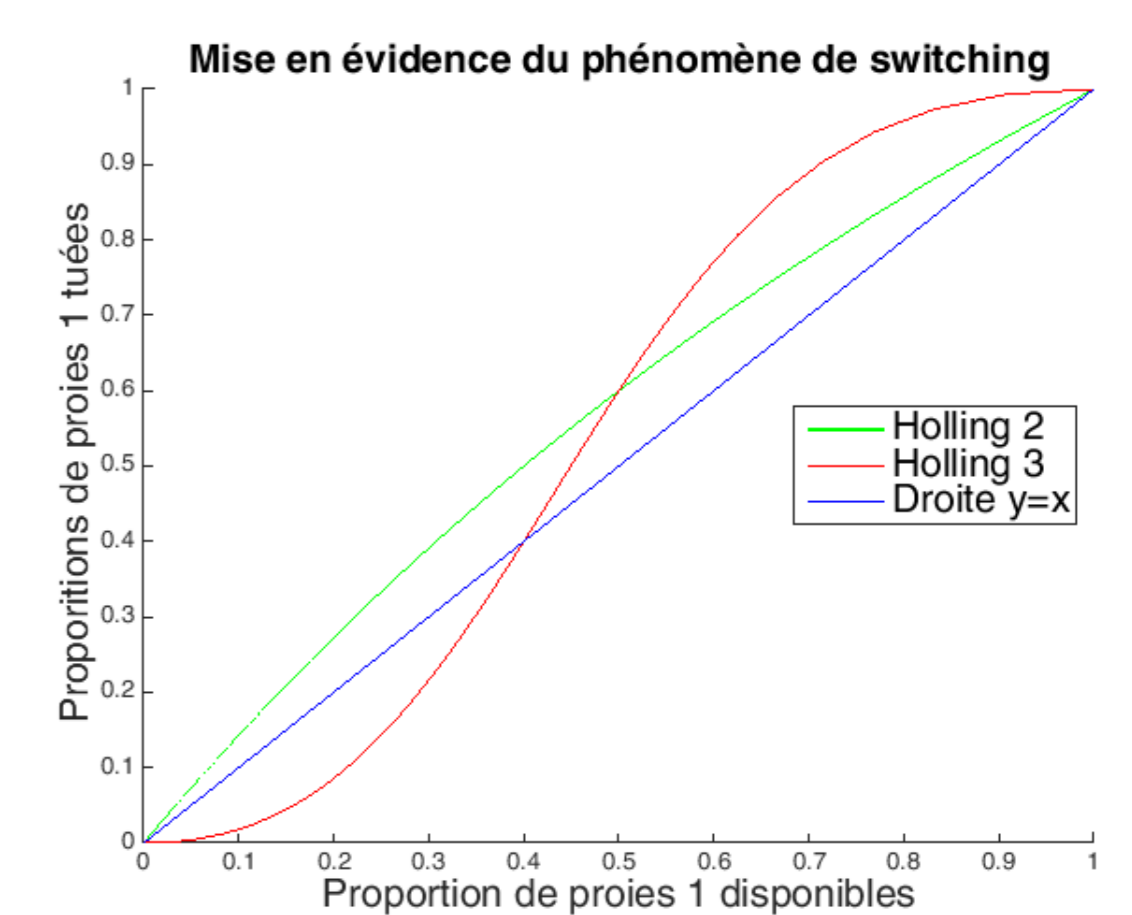


Figure 9: Switching pour Holling 3 avec $a_1 = 0.3$ et $a_2 = 0.2$